Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :
Mathématiques Fondamentales

Présentée et soutenue par
Hoang-Chinh LU
le : 30 Novembre 2012

Titre :
Équations hessiennes complexes

École doctorale :
Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :
UMR 5219

Directeur de thèse :
Ahmed ZERIAHI, Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse

Rapporteurs :
Charles FAVRE, Directeur de Recherches, École Polytechnique, Paris
Sławomir KOŁODZIEJ, Professor, Jagiellonian University, Krakow

Membres du jury :
Charles FAVRE, Directeur de Recherches, École Polytechnique, Paris
Vincent GUEDJ, Professeur, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse
Sławomir KOŁODZIEJ, Professor, Institute of Mathematics, Jagiellonian University, Krakow
Karl OELJEKLAUS, Professeur, LATP, Université d'Aix-Marseille, Marseille
Jean-Michel ROQUEJOFFRE, Professeur, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse
Ahmed ZERIAHI, Professeur, IMT, Université Paul Sabatier, Toulouse

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des équations hessiennes complexes localement sur $\mathbb{C}^n$ et globalement sur les variétés complexes compactes. Dans le premier chapitre, on étudie les classes d'énergie finie de type Cegrell sur un domaine m-hyperconvexe. On résout ensuite des équations hessiennes complexes dans ces classes avec des seconds membres "assez singuliers" par la méthode variationnelle. Dans le deuxième chapitre, on résout des équations hessiennes complexes dégénérées sur des variétés kählériennes compactes, avec un second membre dans L^p. Le troisième chapitre est consacré à l'approche par la méthode de la viscosité. C'est une méthode assez efficace pour résoudre des équations elliptiques dégénérées réelles du second ordre. Elle a été récemment utilisée dans le cas complexe. Elle nous permet d'obtenir un nouveau résultat d'existence et d'unicité dans le cas des variétés hermitiennes compactes homogènes.

Mots-clefs

Variété kählérienne compacte, Variété homogène, Fonctions (ω, m)-sousharmoniques, Opérateur hessien, Capacité, Estimée à priori, Classes de Cegrell, Solutions de viscosité, Principe de comparaison, Sup-convolution, inf-convolution.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Ahmed Zeriahi d'avoir accepté de diriger mes recherches pendant ces trois années de thèse. Il m'a introduit à un sujet riche et passionnant, au carrefour de plusieurs disciplines. Tout le long de ce chemin, il m'a consacré un temps énorme inestimable au cours duquel j'ai été impressioné par sa grande culture mathématiques et sa gentillesse. Ces conseils, en générgal d'apparence très simple, se sont toujours révélés pertinents et profonds. Cette thèse lui doit beaucoup et je suis fier de l'avoir rédigée sous sa direction.

J'exprime également toute ma gratitude à Vincent Guedj pour sa participation à mon jury, pour son aide et son soutien au cours de ces années. Son art de la recherche, son enseignement, sa disponibilité et son indéfectible bonne humeur ont contribué énormément à mes études. Je le remercie sincèrement.

Je suis très touché de l'honneur que me font Charles Favre et Slawomir Kolodziej en ayant accepté de rapporter sur ma thèse.

Je remercie sincèrement Charles Favre pour ses remarques pertinentes et ses propositions qui m'ont aidé à améliorer la rédaction de ma thèse.

C'est ensuite un très grand plaisir de compter parmi les membres du jury Karl Oeljeklaus. Je le remercie vivement de m'avoir communiqué par téléphone un très important et jolie exemple de variété complexe compacte homogène non-kählérienne qui justifie les conditions imposées au chapitre 3.

Je souhaite exprimer un grand merci à Jean-Michel Roquejoffre pour sa participation à mon jury. Je le remercie également pour son aide "administrative" en tant que Directeur de l'Ecole Doctorale M.I.T.T. pendant mes annés de thèse.

J'ai aussi eu la chance de pouvoir profiter des conseils avisés de Sébastien Boucksom lors de ma visite à Jussieu pour laquelle je le remercie. Je remercie également Dan Popovici de m'avoir enseigné la géométrie complexe et de m'avoir consacré beaucoup de temps pour discuter de mathématiques.

Je remercie Martine Labruyère, Jocelyne Picard et Agnès Requis, sans qui la vie des doctorants de mathématiques de Toulouse serait beaucoup plus compliquée. Je remercie également Manuella Rodrigues pour son aide "administrative" pendant mon étude M2 à Toulouse.

Je suis toujours fier d'être un étudiant de l'Université Paul Sabatier. Cela n'a été possible qu'avec l'aide de Do Duc Thai et Nguyen Tien Zung au cours du programme de Master 1 international à Hanoi. Je les remercie sincèrement non seulement pour leur conseils mais également pour leur enseignements en Mathématiques. Je remercie Zung également d'avoir organisé un séminaire hebdomadaire dans lequel il nous a appris les mathématiques ainsi que la vie à Toulouse.

Je ne peux pas écrire de remerciements sans citer mes amis Vienamiens qui m'ont soutenu pendant mes années à Toulouse. Sans eux, sans l'équipe de football j'étais toujours couvert par la tristesse, la solitude. Des remerciments spéciaux à em Ngoc, em Hoang, anh Giang, anh Binh, anh Minh "blanc", anh Manh, Minh "noir", Minh-Lien, Hung-Yen, Thien etc... Je pense aussi à Dungdailoan, Nguyen Thanh Nhan, MimiPhuong.

Je remecie encore em Ngoc pour sa cuisine, son soutien pendant la période difficile après une fracture mystérieuse au football deux mois avant la soutenance. Je la remercie d'avoir supporté toutes mes soirées Latex, ainsi que mes week-end chargés en mathématiques.

Je remercie Mathieu Arfeux, Thomas Gauthier, Mohamad Sharabati, Eleonora Di Nezza qui ont rendu ces années passées au sein de l'IMT, ainsi que divers évènements mathématiques, agréables et intéressants.

Je remercie Nguyen Van Dong d'avoir lu ma thèse lors de sa visite à Toulouse en septembre 2012 et de m'avoir indiqué une erreur dans la preuve initiale du lemme 3.4.3

Je souhaiterai exprimer ma reconnaissance envers mon "grand-père" Nguyen Thanh Van pour son aide depuis les premiers jours que j'étais en France. Avec lui j'ai appris la culture française, ainsi que l'histoire vietnamienne.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans un programme de recherche sur des équations hessiennes complexes sur les variétés hermitiennes compactes. Il s'agit de la fonction symétrique élémentaire de degré $1 \leq m \leq n$ des valeurs propres d'une (1,1)-forme par rapport à la forme kählérienne ω donnée (où n est la dimension complexe de la variété). Le cas $m = 1$ correspond aux équations de Poisson qui sont classiques. Le cas $m = n$ correspond aux équations de Monge-Ampère complexes qui ont été étudiées intensivement ces dernières années avec des applications en géométrie kählérienne (voir [Y78, Kol98, Bl03, GZ05, BBGZ09, EGZ09, EGZ11], etc...).

Contrairement aux équations de Monge-Ampère complexes, où les valeurs propres de la forme sont positives, les équations hessiennes complexes sont plus difficiles à manipuler. Les fonctions m-sousharmoniques (m-sh) ne possèdent pas de jolies propriétés de valeurs moyennes. Elles ne sont pas invariantes par les applications holomorphes. Les fonctions (ω, m)-sousharmoniques ((ω, m)-sh) ne sont pas invariantes par translation dans une carte locale.

Les équations hessiennes réelles ont ét étudiées intensivement ces dernières années avec de nombreuses applications (voir [W09] et ses références). Les équations hessiennes complexes sont intimement liées aux équations de Monge-Ampère quaternioniques sur les variétés hyperkählériennes compactes (voir [AV10]).

Li [Li04] a résolu le problème de Dirichlet non-dégénéré (avec des données lisses en cherchant des solutions lisses) pour l'équation hessienne complexe sur un domaine lisse borné de $\mathbb{C}^n$ dont le bord est strictement (m-1)-pseudoconvexe. Blocki [Bl05] a développé les premiers éléments d'une théorie du potentiel locale pour l'équation hessienne sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ analogue à celle de Bedford-Taylor [BT76].

Suivant une suggestion de Blocki [Bl05], il est naturel d'étudier l'équation hessienne complexe sur des variétés kählériennes compactes.

Hou [H09] et Jbilou [Jb10] l'ont résolu indépendamment en supposant que la variété ambiante est à courbure bisectionnelle holomorphe non négative. Lors de la tentative de Hou-Ma-Wu [HMW10] d'enlever cette hypothèse, une estimée à priori $\mathcal{C}^2$ a été établie. Ce résultat n'entraîne pas directement la résolution mais il permet de ramener le problème à un théorème de type Liouville pour les fonctions m-sousharmoniques maximales bornées sur $\mathbb{C}^n$ par un argument d'éclatement classique dû à Chen [Ch00]. Ce théorème de type Liouville a été très récemment démontré par Dinew et Kolodziej [DK12], ce qui permet de résoudre l'équation hessienne complexe non-dégénérée sans hypothèse de courbure.

Cette thèse a un triple objectif :
- Développer une théorie du potentiel pour l'opérateur hessien complexe aussi bien au niveau local i.e. sur un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ qu'au niveau global i.e. sur une variété kählerienne compacte.
- Appliquer cette théorie à la résolution des équations hessiennes complexes dégénérées dans chacun de ces deux cas.
- Appliquer les méthodes de viscosité aux équations hessiennes complexes dégénérées pour obtenir des solutions faibles dans chacun de ces deux cas. Cela nous permet de montrer en particulier que sur certaines variétés hermitiennes compactes homogènes (non nécessairement kähleriennes) il y a un principe de comparaison global qui assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation hessienne complexe au sens de la viscosité.

Les résultats essentiels obtenus sont résumés dans ce qui suit.

Équations Hessiennes complexes sur $\mathbb{C}^n$

Dans le premier chapitre de cette thèse, on développe suivant Blocki [Bl05] une théorie du potentiel locale pour les fonctions m-sousharmoniques (m-sh en abrégé). L'opérateur hessien complexe

$$H_m(\varphi) = (dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m},$$

où β est la forme kählerienne standard de $\mathbb{C}^n$, est bien-définie si φ est m-sh localement bornée. On montre, en adaptant les idées de Bedford-Taylor [BT76], que cet opérateur est continue pour les suites décroissantes et également pour les suites convergeant en m-capacité. On en déduit le principe de comparaison pour les fonctions m-sh localement bornées. Ensuite, on étudie les classes d'énergie finie de type Cegrell sur un domaine $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$.

On définit d'abord la classe $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ des "fonctions tests" pour cette théorie. C'est la classe des fonctions m-sh φ négatives et bornées, nulles au bord et telles que $\int_\Omega H_m(\varphi) < +\infty$. Pour chaque exposant $p > 0$, on désigne $\mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$, l'ensemble des fonctions φ m-sh négatives pour lesquelles l'opérateur hessien complexe est bien défini et vérifie

$$e_p(\varphi) := \int_\Omega (-\varphi)^p H_m(\varphi) < +\infty.$$

On résout les équations hessiennes complexes dans un domaine m-hyperconvexe avec des seconds membres assez singuliers par la méthode variationnelle. L'idée de cette méthode est de considérer la fonctionnelle dont l'équation hessienne considérée est l'équation d'Euler-Lagrange et de la minimiser sur un ensemble compact de fonctions m-sh convenable. On montre ensuite que ce point minimum est la solution cherchée. Ces résultats sont des généralisations directes de ceux de la théorie du pluripotentiel [Ceg98, Ceg04, ACC10]. On résume ici le résultat essentiel de ce chapitre :

Théorème 0.0.1. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω et $p > 0$. Alors $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\Omega, \mu)$ si et seulement si il existe une unique $\varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ telle que $H_m(\varphi) = \mu$.*

Remarquons tout d'abord que l'inclusion $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\Omega, \mu)$ se traduit de manière quantitative par l'inégalité à priori suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega (-u)^p d\mu \leq C e_p(u)^{\frac{p}{m+p}}, \ \forall u \in \mathcal{E}_m^0(\Omega). \tag{0.0.1}$$

Il est facile de voir que dans ce cas l'inégalité (0.0.1) est alors vérifiée pour toutes les fonctions $u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ par approximation.

Le fait que l'estimation (0.0.1) soit vérifiée lorsque μ est de la forme $\mu = H_m(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ se fait facilement par une intégration par parties.

Pour démontrer la réciproque, on procède en plusieurs étapes.

Observons d'bord qu'en prenant une suite d'exhaustive de compacts de Ω, on peut supposer sans perte de généralité que μ est à support compact dans $K \Subset \Omega$. On notera $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mu)$.

Étape 1 : On résout l'équation $H_m(\varphi) = \mu$ dans $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$, lorsque μ vérifie la condition $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^1(\mu)$.

On considère, pour chaque constante $A > 1$, l'ensemble $\mathcal{N}_A$ des mesures finies à support dans K vérifiant la condition suivante :

$$\int_\Omega (-u)^2\, d\nu \leq A\, e_1(u)^{\frac{2}{m+1}} \text{ pour toute } u \in \mathcal{E}^0_m(\Omega). \tag{0.0.2}$$

1.1 : On décompose μ sous la forme $\mu = g.\nu$, où $\nu \in \mathcal{N}_A$, $\nu(\Omega) = 1$, et $g \in L^1(\nu)$, $A > 1$ étant une constante convenable.

En effet, avec A une constante convenable, l'ensemble des mesures probabilités dans $\mathcal{N}_A$ est un compact convexe non vide de l'espace des mesures probabilités sur Ω. Comme μ ne charge pas les ensembles m-polaires, en appliquant un théorème de Radon-Nikodym généralisé ([Rai69], [Ceg98]), on peut démontrer que μ s'écrit sous la forme $\mu = g\nu$, où $g \in L^1(\nu)$ et $\nu \in \mathcal{N}_A$, $A > 0$ étant une constante assez grande mais fixée.

1.2 : On résout l'équation $H_m(u) = \nu$, avec $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ lorsque $\nu \in \mathcal{N}_A$.

On souhaite appliquer ici la méthode variationnelle en s'inspirant de [BBGZ09]. L'idée est d'introduire la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{F}_\nu : \mathcal{E}^1_m(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{F}_\nu(u) = \frac{1}{m+1} e_1(u) + \int_\Omega u d\nu, \quad e_1(u) = \int_\Omega (-u) H_m(u),$$

pour laquelle l'équation d'Euler-Lagrange est précisément l'équation hessienne complexe $H_m(u) = \mu$ au sens faible sur Ω.
Le but est alors de minimiser cette fonctionnelle sur l'espace $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et de montrer que la fonction $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ qui la minimise vérifie l'équation $H_m(u) = \nu$.
En effet, soit $(u_j) \subset \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ une suite minimisante i.e. telle que

$$\lim_j \mathcal{F}_\nu(u_j) = \inf_{v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)} \mathcal{F}_\nu(v) \leq 0.$$

L'hypothèse (0.0.2) entraîne alors que $\sup_j e_1(u_j) < +\infty$. Par (0.0.2), la suite (u_j) est bornée dans $L^2(\nu)$. Comme ν ne charge pas les ensembles m-polaires, on peut démontrer qu'il existe une sous-suite (encore notée (u_j)) telle que (u_j) converge vers $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ au sens des distributions et telle que $\int_\Omega u_j d\nu \to \int_\Omega u d\nu$. L'inégalité

$$\liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}_\nu(u_j) = \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{m+1} e_1(u_j) + \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j d\nu \geq \frac{1}{m+1} e_1(u) + \int_\Omega u d\nu = \mathcal{F}_\nu(u)$$

montre que le minimum de $\mathcal{F}_\nu$ sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ est atteint en u.
Soit maintenant $v \in \mathcal{E}^0_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $P(u + tv)$, définie par

$$P(u + tv) = \sup\{w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega) \ / \ w \leq u + tv\}$$

appartient à $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$. On considère cette projection car lorsque $t < 0$ la fonction $u + tv$ n'est pas dans la classe $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ en général.
Un point clé de cette étape est de démontrer que la fonction

$$g(t) := \frac{1}{m+1} e_1(P(u + tv)) + \int_\Omega (u + tv) d\nu$$

est dérivable en 0 et que

$$g'(0) = -\int_\Omega vH_m(u) + \int_\Omega vd\nu.$$

Comme $P(u+tv) \leq u+tv$, on a $g(t) \geq \mathcal{F}_\nu((P(u+tv)) \geq \mathcal{F}_\nu(u) = g(0),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que g atteint son minimum au point 0 et donc $g'(0) = 0$. Ce qui donne l'égalité $\int_\Omega vH_m(u) = \int_\Omega vd\nu$ et donc $H_m(u) = \nu$ au sens des mesures puisque $v \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est arbitraire.

1.3 : On résout l'équation $H_m(\varphi) = \mu$ dans $\mathcal{E}_m^1(\Omega)$, lorsque μ vérifie la condition $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^1(\mu)$.

En effet d'après l'étape 1.1, la mesure μ s'écrit $\mu = g \cdot \nu$ avec $\nu \in \mathcal{N}_A$ et $g \in L^1(\nu)$. Alors pour chaque $j > 0$ fixé, la mesure tronquée

$$\nu_j := \min(g, j) \cdot \nu$$

vérifie l'inégalité $\nu_j \leq j\nu$ au sens des mesures et donc $\nu_j \in \mathcal{N}_{jA}$. D'après l'étape 1.1, il existe $\varphi_j \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ telle que

$$H_m(\varphi_j) = \nu_j.$$

Comme la suite (ν_j) croit, d'après le principe de comparaison la suite (φ_j) décroit vers une fonction $\varphi \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$.
L'inégalité (0.0.1) s'applique avec $p = 1$ pour donner

$$e_1(\varphi_j) = \int_\Omega (-\varphi_j)H_m(\varphi_j) \leq \int_\Omega (-\varphi_j)d\mu \leq Ce_1(\varphi_j)^{\frac{1}{m+1}},$$

ce qui implique que

$$e_1(\varphi_j) \leq C^{\frac{m+1}{m}}.$$

On conclut que $\sup_j e_p(\varphi_j) < +\infty$, et donc $\varphi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$. Par continuité de l'opérateur hessien H_m pour les suites décroissantes, on en déduit que $H_m(\varphi) = \mu$.

Étape 2 : On décompose $\mu = f.H_m(\psi)$, avec $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $f \in L^1(H_m(\psi))$.

D'après l'étape 1.2 et l'étape 1.1, μ s'écrit sous la forme

$$\mu = gH_m(u),\ \text{où } u \in \mathcal{E}_m^1(\Omega),\ 0 \leq g \in L^1(H_m(u)) \text{ et } \mathrm{supp}(H_m(u)) = K \Subset \Omega.$$

On construit une fonction $v \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que $v = (-u)^{-1} - C_1 < 0$ dans un petit voisinage de K ($C_1 > 0$ est une constante). Alors $(-u)^{-2m}H_m(u) \leq H_m(v)$.
La mesure $\lambda := (-u)^{-2m}H_m(u)$ vérifie $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^1(\lambda)$ car par intégration par parties, on a pour tout $w \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (-w)d\lambda \leq \int_\Omega (-w)H_m(v) \leq e_1(w)^{\frac{1}{m+1}}.e_1(v)^{\frac{m}{m+1}}.$$

D'après l'étape 1.3, il existe $\psi \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ telle que

$$H_m(\psi) = \lambda = (-u)^{-2m}H_m(u).$$

Cela nous donne $\mu = g(-u)^{2m}H_m(\psi) = fH_m(\psi)$, avec $f = g.(-u)^{2m}$. Comme $H_m(\psi) \leq H_m(v)$, on déduit par le principe de comparaison que $v \leq \psi$, et donc $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$.

Étape 3 : On résout $H_m(\varphi) = \mu$ dans $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$, lorsque μ vérifie la condition $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\mu)$.

D'après l'étape 2, on a

$$\mu = fH_m(\psi),\quad \psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega),\ 0 \leq f \in L^1(H_m(\psi)).$$

Pour chaque j, la mesure $\mu_j := \min(f,j)H_m(\psi)$ vérifie $\mathcal{E}^1_m(\Omega) \subset L^1(\mu_j)$. D'après l'étape 1 il existe $\varphi_j \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que

$$H_m(\varphi_j) = \min(f,j)H_m(\psi).$$

De plus, $H_m(\varphi_j) \leq H_m(j^{1/m}\psi)$. D'après le principe de comparaison, on a φ_j décroit et $j^{1/m}\psi \leq \varphi_j$, donc $\varphi_j \in \mathcal{E}^0_m(\Omega)$.

Ainsi, comme $\mathcal{E}^p_m(\Omega) \subset L^p(\mu)$, l'inégalité (0.0.1) nous donne

$$e_p(\varphi_j) = \int_\Omega (-\varphi_j)^p H_m(\varphi_j) \leq \int_\Omega (-\varphi_j)^p d\mu \leq C.e_p(\varphi_j)^{\frac{p}{m+p}}.$$

On en déduit que $\sup_j e_p(\varphi_j) < +\infty$. Donc, $\varphi_j \downarrow \varphi \in \mathcal{E}^p_m(\Omega)$ qui résout l'équation $H_m(\varphi) = \mu$.

L'unicité résulte du principe de comparaison.

Par la même preuve, on obtient un résultat similaire pour la classe $\mathcal{F}_m(\Omega)$, la classe des fonctions m-sh négatives dans Ω pour lesquelles l'opérateur hessien complexe est bien défini et de masses finies.

Théorème 0.0.2. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω telle que $\mu(\Omega) < +\infty$. Si μ ne charge pas les ensembles m-polaires, alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ telle que $H_m(\varphi) = \mu$.*

Équations hessiennes complexes dégénérées sur les variétés kählériennes compactes

Dans ce deuxième chapitre, on considère (X,ω) une variété kählérienne compacte de dimension n et m un entier entre 1 et n. On étudie l'équation suivante

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = F(x,\varphi)\omega^n, \tag{0.0.3}$$

où la densité $F : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vérifie certaines conditions naturelles.

Le cas $m = 1$ correspond à l'équation de Poisson classique, tandis que le cas $m = n$ correspond à l'équation de Monge-Ampère complexe dégénérée, qui a été étudiée de manière intensive ces dernières années (voir [Bl03, Bl05, Bl12, BGZ08, BK07, EGZ09, GKZ08, GZ05, GZ07, Kol98, Kol02, Kol03, Kol05]). Ainsi l'équation (0.0.3) est une généralisation de l'équation de Poisson et de l'équation de Monge-Ampère complexe.

Suivant une suggestion de Blocki [Bl05], on tente de développer une théorie du potentiel pour l'équation hessienne complexe sur les variétés kälériennes compactes. Pour ce faire, on définit la classe de fonctions (ω,m)-sh qui est une généralisation de la classe de fonctions ω-plurisousharmoniques (ω-psh) quand $m = n$. La définition de l'opérateur hessien complexe pour les fonctions (ω,m)-sh bornées est délicate en raison des difficultés liées à l'absence de procédé de régularisation.

Pour contourner ces difficultés, on introduit une notion de capacité et on l'utilise pour définir le concept de convergence quasi-uniforme. Ceci nous permet de définir une classe convenable de fonctions (ω,m)-sh quasi-continues pour laquelle l'opérateur hessien complexe est bien défini et continue pour les limites quasi-uniformes. On montrera que cette définition coïncide avec la définition au sens des courants dans l'esprit de Bedford et Taylor. On établit également le principe de comparaison et des résultats de convergences pour cet opérateur.

Avec ces outils potentiels à disposition, on considère l'équation hessienne complexe dégénérée. Le premier résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 0.0.3. *Soit (X,ω) une variété kählérienne compacte de dimension n. Fixons un entier $1 \leq m \leq n$. Soit $F : X \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*
$(F1)$ pour tout $x \in X$, $t \mapsto F(x,t)$ est croissante et continue,

(F2) pour chaque $t \in \mathbb{R}$ fixé, il existe $p > n/m$ tel que la fonction $x \mapsto F(x,t)$ appartient à $L^p(X)$,
(F3) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X F(.,t_0)\omega^n = \int_X \omega^n$.
Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}(X)$, unique à une constante additive près, telle que

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = F(x,\varphi)\omega^n.$$

De plus, si $\forall x \in X,\ t \mapsto F(x,t)$ est strictement croissante, alors la solution est unique.

Remarquons que la condition (F3) est immédiate si $F(.,-\infty) = 0$ et $F(.,+\infty) = +\infty$. Un cas particulier important est la fonction exponentiel $F(x,t) = f(x)e^t$.

Ce résultat est une généralisation de celui dans [DK11]. Le point clé dans leur preuve est une estimée volume-capacité qu'on utilisera également ici.

Idée de la preuve. Si F ne dépend pas de t, l'estimée volume-capacité de Dinew-Kolodziej [DK11] donne une solution continue. Pour le cas général on utilise le théorème du point fixe de Schauder. Pour chaque fonction ψ (ω,m)-sh bornée, le second membre $f(x) = F(x,\psi(x))$ est indépendant de t et vérifie $f(x) \leq F(x,M) \in L^p(X)$, où $M = \sup_X \psi$. D'après ce qui précède on peut trouver $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}(X)$ unique, normalisée par $\sup_X \varphi = 0$, telle que

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = F(x,\psi + c_\psi)\omega^n,$$

où c_ψ est une constante de normalisation ($\int_X F(x,\psi + c_\psi)\omega^n = \int_X \omega^n$). C'est parce que F vérifie (F1), (F2), (F3). On peut donc définir une application

$$\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C},\ \psi \mapsto \varphi,$$

où $\mathcal{C}$ est un compact convexe convenable de $L^1(X)$ contenu dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)$. On montre que Φ est bien-définie et continue sur $\mathcal{C}$.

D'après le théorème du point fixe de Schauder, Φ admet un point fixe dans $\mathcal{C}$, soit φ. Par définition de Φ, la fonction φ appartient à $\mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ et on a

$$H_m(\varphi) = F(.,\varphi + c_\varphi)\omega^n.$$

La fonction $\varphi + c_\varphi$ est la solution cherchée.

Comme application de la théorie du potentiel qu'on vient de développer, on considère un cas particulier. On suppose que (X,ω) est une variété kählérienne compacte satisfaisant aux conditions suivantes :

(H1) $X = G/H$ où G est un groupe de Lie complexe et $H \subset G$ est un sous groupe fermé.

(H2) Il existe un sous groupe compact $K \subset G$ qui agit transitivement sur X.

(H3) ω est invariante par K.

Dans ce contexte on peut régulariser globalement une fonction (ω,m)-sh par une suite de fonctions (ω,m)-sh lisses en prenant la moyenne par la mesure de Haar de K. On utilise la même construction que dans [G99] et [Hu94]. Par le même raisonnement que dans [EGZ09] on obtient le résultat de régularité suivant :

Théorème 0.0.4. *Soit (X,ω) une variété compacte kählérienne homogène vérifiant (H1), (H2), (H3) et supposons que F satisfait les conditions (F1), (F2) et (F3) dans le théorème 0.0.3. Alors l'unique solution de (0.0.3) est continue Höldérienne d' exposant γ pour tout $0 < \gamma < \frac{2(mp-n)}{mnp+2mp-2n}$.*

Idée de la preuve.

Soit d une distance Riemannienne sur K. Soit φ l'unique solution continue de (0.0.3). Pour $h \in K$, on note $\varphi_h(x) := \varphi(h.x),\ x \in X$. On considère la suite régularisante suivante

$$\varphi_\epsilon(x) := \int_K \varphi(g^{-1}.x)\chi_\epsilon(g)dg,$$

où dg est la mesure de Haar sur K et χ_ϵ est un noyau lisse dont le support décroît vers $\{e\}$ (l'identité de K), et $\int_K \chi_\epsilon(g)dg = 1, \forall \epsilon > 0$. Par [G99], [Hu94], φ_ϵ est lisse pour tout $\epsilon > 0$ et φ_ϵ converge uniformément vers φ sur X. Le point clé dans la preuve est de démontrer que φ_ϵ est (ω, m)-sh. Si u est (ω, m)-sh lisse, on peut montrer que

$$\|u_h - u\|_{L^2}^2 \leq C.d^2(h,e) \int_X (-u) dd^c u \wedge \omega^{n-1},$$

où par C, on désigne une constante positive qui ne dépend pas de h. Comme $\varphi_\epsilon \rightrightarrows \varphi$, on obtient

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(X)} \leq C.d(h,e).$$

Pour $h \in K$ fixé, observons que φ_h est (ω, m)-sh et satisfait $H_m(\varphi_h) = F(h.x, \varphi(h.x))\omega^n$.

À ce stade, on applique le théorème de stabilité dont la preuve se fait comme dans [EGZ09]. Cela nous donne

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty} \leq C.\|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(X)}^\gamma.$$

Par conséquence,

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty(X)} \leq C.d(h,e)^\gamma, \ \forall h \in K.$$

Comme dans [EGZ09], cela nous donne la continuité γ-Höldérienne de φ.

Remarque 0.0.5. Quand $m = n$ on obtient le même résultat que dans [EGZ09].

Une approche par la méthode de la viscosité

Dans ce troisième chapitre, on étudie les solutions de viscosité. En contraste avec la théorie du potentiel sur les variétés compactes, la méthode de viscosité introduite dans [Lio83] (voir aussi [CIL92]) est purement locale. Elle est assez efficace pour résoudre des équations elliptiques non linéaires du second ordre qui n'ont pas en général de solutions ni au sens classique ni au sens faible des distributions.

Cette approche a été utilisée récemment dans [EGZ11] pour étudier les équations Monge-Ampère complexes sur des variétés kählériennes compactes. Dans le contexte local, le problème de Dirichlet pour les équations Mong-Ampère complexes avec des second membres dépendant de la solution a été ensuite considéré dans [YW10].

Comme dans [EGZ11], on compare systématiquement les solutions de viscosité et les solutions potentielles. Ensuite, on cherche à résoudre une équation hessienne complexe au sens de la viscosité avec un second membre et une donnée au bord continues.

Théorème 0.0.6. *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, g une fonction continue sur $\partial\Omega$, $F(x,t)$ une fonction continue et croissante par rapport à t. Supposons qu'il existe une sous-solution (de viscosité) bornée u et une sur-solution bornée v de l'équation*

$$-(dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} + F(x,\varphi)\beta^n = 0 \tag{0.0.4}$$

telles que $u_* = v^* = g$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une unique solution de viscosité de (0.0.4). Cette solution est également l'unique solution potentielle de cette équation.

De plus, si les données (y compris la sous-solution et sur-solution) sont Höldériennes, on montre que la solution l'est aussi. Pour donner des exemples où l'existence de sous-solution et sur-solution est garantie, on considère les domaines strictement pseudoconvexes.

Pour démontrer ce résultat on établit tout d'abord le principe de comparaison local.

Théorème 0.0.7. *Supposons que $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, et croissante en la deuxième variable. Soient u une sous-solution et v une sur-solution de viscosité de l'équation*

$$-H_m(\varphi) + F(x, \varphi)\beta^n = 0.$$

Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ alors $u \leq v$ dans Ω.

Idée de la preuve du théorème 0.0.7. Sans perte de généralité on peut supposer que $u < v$ près du bord de Ω. On va raisonner par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) - v(x_0) = a > 0$. On note u^ϵ, v_ϵ la sup-convolution et inf-convolution définie par

$$u^\epsilon(x) := \sup\{u(y) - \frac{1}{\epsilon^2}|x - y|^2 \ / \ y \in \Omega\}; \ v_\epsilon(x) := \inf\{u(y) - \frac{1}{\epsilon^2}|x - y|^2 \ / \ y \in \Omega\}.$$

Elles sont semi-convexes et semi-concaves respectivement. D'après un célèbre théorème d'Alexandroff [Kr87] elles sont donc deux fois ponctuellement différentiables presque partout. De plus, on a au sens de la viscosité :

$$H_m(u^\epsilon) \geq F_\epsilon(x, u^\epsilon)\beta^n,$$

dans $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \ / \ d(x, \partial\Omega) > A\delta\}$, $A = \sqrt{\mathrm{osc}(u)}$. Ici on a noté

$$F_\epsilon(x, t) := \inf\{F(y, t) \ / \ |x - y| \leq A\epsilon\}.$$

De façon similaire, on a au sens de la viscosité :

$$H_m(v_\epsilon) \leq F^\epsilon(x, v_\epsilon)\beta^n,$$

dans Ω_ϵ où $F^\epsilon(x, t) := \sup\{F(y, t) \ / \ |x - y| \leq A\epsilon\}$.
En considérant l'enveloppe convexe de la fonction $\min(v_\epsilon - u^\epsilon, 0)$ et en utilisant l'estimée d'Alexandroff-Bakelman-Pucci on peut trouver pour chaque $\epsilon > 0$ un point $x_\epsilon \in K \Subset \Omega$ tel que

$$\delta + F_\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon)) \leq F^\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon)),$$

où $\delta > 0$ est une autre constante qui ne dépend pas de ϵ. Quitte à extraire une sous-suite, en faisant $\epsilon \to 0$ on obtient une contradiction.

Idée de la preuve du théorème 0.0.6. D'après le principe de comparaison, $u \leq v$. On peut donc considérer l'enveloppe supérieure des sous-solutions définie par

$$\varphi := \sup\{w : w \text{ est une sous solution de (0.0.4)}, \ u \leq w \leq v\}.$$

D'après le lemme de Choquet la régularisée semi-continue supérieurement φ^* de φ vérifie $\varphi^* = (\sup w_j)^*$ où (w_j) est une suite de sous-solutions de (0.0.4) telle que $u \leq w_j \leq v$. La notion de sous-solution de viscosité étant stable en prenant le maximum, on peut supposer que (w_j) est croissante. On peut montrer alors que φ^* est une sous-solution de (0.0.4), donc $\varphi = \varphi^*$ est la sous-solution maximale de (0.0.4).
Notons φ_* la régularisée semi-continue inférieurement de φ. Un point clé de la preuve du théorème est de démontrer que φ_* est une sur-solution de (0.0.4). Cela se fait par contradiction : si φ_* n'est pas une sur-solution, on peut construire "par une méthode de bosses" une sous-solution $\tilde{\varphi}$ telle que $\varphi \leq \tilde{\varphi}$ mais $\varphi \neq \tilde{\varphi}$, ce qui contredit le fait que φ est la sous-solution maximale [CIL92].
Par l'hypothèse on a $g = u_* \leq \varphi_* \leq \varphi^* \leq v^* = g$ sur $\partial\Omega$. Pour cette raison, le principe de comparaison nous donne $\varphi = \varphi_* = \varphi^*$, qui est donc une solution de viscosité de (0.0.4).

Pour montrer que φ est une solution potentielle de (0.0.4) on utilise un argument de balayage standard (voir [BT76]) et un théorème de Dinew-Kolodziej [DK11] (voir aussi [Bl05]).

En version globale, on cherche à résoudre l'équation hessienne complexe au sens de la viscosité sur les variétés hermitiennes compactes homogènes (X, ω) vérifiant (H1), (H2) et (H3) énoncées au chapitre 2. La forme hermitienne ω étant invariante, cela nous permet de démontrer un principe de comparaison global de façon similaire à ce que nous avons fait dans le cas local, sans supposer que ω est fermée. Plus précisément, on démontre le résultat suivant.

Théorème 0.0.8. *Supposons que u, v sont respectivement sous-solution et sur-solution bornée de l'équation*

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F(x,\varphi)\omega^n = 0,$$

où $0 \leq F(x,t)$ est une fonction continue sur $X \times \mathbb{R}$ et strictement croissante en t. Alors $u \leq v$ sur X.

Idée de la preuve du théorème 0.0.8. À l'aide de l'action du groupe compact K, on définit une sup et inf-convolution globale sur X :

$$u^\epsilon(x) := \sup\Big\{u(g.x) - \frac{1}{\epsilon^2}d^2(g,e) \ / \ \ g \in K\Big\},$$

et

$$v_\epsilon(x) := \inf\Big\{v(g.x) + \frac{1}{\epsilon^2}d^2(g,e) \ / \ \ g \in K\Big\},$$

où d est une distance sur K telle que d^2 est de classe $\mathcal{C}^2(K \times K)$. On montre que ces deux suites de régularisation sont constituées de fonctions qui lues dans une carte locale sont des fonctions semi-convexes et semi-concaves respectivement. En particulier, d'après un célèbre théorème d'Alexandroff [Kr87], elles sont deux fois ponctuellement différentiables presque partout. De plus, l'invariance de ω entraîne que les fonctions régularisantes vérifient des inéquations hessiennes complexe approchées correspondantes au sens de la viscosité. Plus précisément, u^ϵ est une sous-solution de l'équation

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F_\epsilon(x,\varphi)\omega^n = 0, \tag{0.0.5}$$

où

$$F_\epsilon(x,t) := \inf\Big\{F(g.x,t) \ \ | \ g \in K, d(g,e) \leq \sqrt{\operatorname{osc}(u)}\epsilon\Big\}.$$

De façon similaire, v_ϵ est une sur-solution de

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F^\epsilon(x,\varphi)\omega^n = 0, \tag{0.0.6}$$

où

$$F^\epsilon(x,t) := \sup\Big\{F(g.x,t) \ \ | \ g \in K, d(g,e) \leq \sqrt{\operatorname{osc}(v)}\epsilon\Big\}.$$

Le reste de la preuve se fait essentiellement comme dans la preuve du principe de comparaison local.

Pour chaque $\epsilon > 0$, soit $x_\epsilon \in X$ un point où $u^\epsilon - v_\epsilon$ atteint son maximum sur X.
On traite tout d'abord le cas où u^ϵ, v_ϵ sont deux fois ponctuellement différentiables en x_ϵ. Dans ce cas, d'après le principe du maximum, on a

$$dd^c u^\epsilon \leq dd^c v_\epsilon \text{ en } x_\epsilon.$$

La forme $(\omega + dd^c u^\epsilon)$ est (ω, m)-positive en x_ϵ. Donc,

$$(\omega + dd^c u^\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \leq (\omega + dd^c v_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \text{ en } x_\epsilon.$$

Par conséquent,

$$F_\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon) \leq F^\epsilon(x_\epsilon, v_\epsilon(x_\epsilon)). \tag{0.0.7}$$

Après passage à une suite $(\epsilon_j) \downarrow 0$, cette inégalité entraîne que

$$\sup_X (u - v) \leq \sup_X (u^{\epsilon_j} - v_{\epsilon_j}) = u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) - v_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) \leq 0.$$

Maintenant, si u^ϵ, v_ϵ ne sont pas deux fois ponctuellement différentiables en x_ϵ pour un $\epsilon > 0$ fixé on procède comme dans [EGZ11] (voir aussi [CIL92]) pour montrer que (0.0.7) est encore vraie. Considérons une carte locale centrée en x_ϵ. Pour alléger les notations, on identifie un point dans un voisinage de x_ϵ avec son image dans $\mathbb{C}^n$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction semi-convexe $u^\epsilon - v_\epsilon - \frac{1}{2k}\|x\|^2$ atteint son maximum strict en x_ϵ. D'après le lemme de Jensen ([Jen88] ; voir aussi [CIL92, Lemma A.3, page 60]), il existe $p_k, \xi_k \in B(0, 1/k)$ qui convergent vers 0 telles que les fonctions u^ϵ, v_ϵ sont deux fois ponctuellement différentiables en x_k et la fonction

$$u^\epsilon - v_\epsilon - \frac{1}{2k}\|x\|^2 - \langle p_k, x\rangle$$

atteint son maximum local en x_k. On obtient donc

$$dd^c u^\epsilon \leq dd^c v_\epsilon + O(1/k)\omega \text{ en } x_k. \tag{0.0.8}$$

Comme u^ϵ est (ω, m)-sh, $\omega + dd^c u^\epsilon$ est (ω, m)-positive en x_k. En plus, les deux fonctions sont deux fois ponctuellement différentiables en x_k. À partir de (0.0.8), on déduit que

$$(\omega + dd^c u^\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \leq (\omega + dd^c v_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} + O(1/k)\omega^n \text{ en } x_k.$$

Comme u^ϵ est une sous-solution de (0.0.5) et v_ϵ est une sur-solution de (0.0.6), on obtient

$$F_\epsilon(y_k, u^\epsilon(y_k)) \leq F^\epsilon(y_k, v_\epsilon(y_k)) + O(1/k).$$

En faisant $k \to +\infty$ on obtient (0.0.7).

Grâce à ce principe de comparaison global, on montre l'existence et l'unicité de la solution de viscosité, de la même façon que le cas local, en utilisant la méthode des enveloppes de Perron. On a le théorème suivant.

Théorème 0.0.9. *Supposons que (X, ω) est une variété hermitienne compacte homogène vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3). Soit $F(x, t)$ une fonction continue croissante en t et supposons qu'il existe $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$F(x, t_0) \leq 1 \leq F(x, t_1),\ \forall x \in X.$$

Alors il existe une unique solution de viscosité de

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F(x, \varphi)\omega^n = 0.$$

L'avantage de ce résultat est qu'on ne suppose pas la fermeture de ω. En effet, un exemple de variété hermitienne compacte vérifiant (H1), (H2), (H3) qui n'est pas kählerienne nous a été communiqué par Karl Oeljeklaus que nous remercions (voir exemple 3.5.4).

Si $m = n$, on obtient en particulier un résultat nouveau pour l'équation Monge-Ampère complexe. Ces résultats nous paraissent intéressants dans le contexte des récents développements sur les équations de Monge-Ampère complexes sur les variétés hermitiennes compactes (non kählériennes) où l'absence de "principe de comparaison" rend la situation plus compliquée (voir [TWe10], [DK09]).

Chapitre 1

Équations Hessiennes complexes sur $\mathbb{C}^n$

Dans ce chapitre β est la forme de kähler standard sur $\mathbb{C}^n$, et Ω est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. On fixe m un entier entre 1 et n. Tout d'abord on introduit la notion de fonction m-sousharmonique et on énonce quelques résultats connus. Ensuite, on développera une théorie du potentiel pour l'équation hessienne complexe sur Ω et on l'appliquera à la démonstration des théorèmes 0.0.1 et 0.0.2.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Fonctions symétriques élémentaires

Nous allons utiliser les notations de Blocki [Bl05]. Soient $1 \leq k \leq n$ deux nombres entiers naturels. La fonction symétrique élémentaire de $\mathbb{R}^n$ de degré k est définie par

$$S_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}...\lambda_{i_k}, \text{ où } \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On résume quelques propriétés importantes des fonctions symétriques élémentaires dans la proposition suivante

Proposition 1.1.1. *Soit $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $S_j(\lambda) > 0,\ \forall j = 1, ..., m$. Alors*

(i) $\frac{\partial S_m}{\partial \lambda_j}(\lambda) \geq 0,\ \forall j = 1, ..., n;$

(ii) (Inégalité de Maclaurin) $0 \leq \left(\frac{S_m(\lambda)}{\binom{n}{m}}\right)^{1/m} \leq ... \leq \left(\frac{S_2(\lambda)}{\binom{n}{2}}\right)^{1/2} \leq \frac{S_1(\lambda)}{n}.$

Soit Γ_k la composante connexe de $\{S_k(\lambda) > 0\}$ contenant $(1, ..., 1)$.

Lemme 1.1.2.

$$\Gamma_k = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n \ / \ S_k(\lambda_1 + t, ..., \lambda_n + t) > 0,\ \forall t \geq 0\right\}.$$

Démonstration. D'après Gårding [Ga59], on sait que l'ensemble de droit est un cône convexe. Donc, une inclusion est évidente.

Supposons que $x^0 \in \Gamma_k$. On veut montrer que $S_j(x^0) > 0$ pour tout $j = 1, ..., k$.
Comme Γ_k est connexe et contient $a = (1, ..., 1)$ il existe un chemin continue $\gamma : [0, 1] \to \Gamma_k$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x^0$. Posons

$$I = \{t \in [0, 1] \ / \ S_j(\gamma(t)) > 0, \forall j = 1, ..., k\}.$$

Il est claire que I est un ouvert de $[0,1]$ et $0 \in I$. Il suffit donc de montrer que I est un fermé de $[0,1]$. Supposons que (t_i) est une suite dans I qui converge vers $t_0 \in [0,1]$. On a, par continuité, $S_j(\gamma(t_0)) \geq 0, \forall j = 1, ..., k-1$ tandis que $S_k(\gamma(t_0)) > 0$ car $\gamma(t_0) \in \Gamma_k$. Par l'inégalité de Maclaurin pour les polynômes symétriques élémentaires (proposition 1.1.1) on a

$$\Big(\frac{S_j(\gamma(t_0))}{\binom{n}{j}}\Big)^{1/j} \geq \Big(\frac{S_k(\gamma(t_0))}{\binom{n}{k}}\Big)^{1/k} > 0.$$

On en déduit que $t_0 \in I$, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 1.1.3. $\Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ S_j(x) > 0, \ \forall j = 1, ..., k\}$.

Démonstration. Une inclusion est évidente grâce au lemme 1.1.2.
Remarquons que le polynôme S_k est hyperbolique par rapport à $a = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$S_k(x + t.a) = S_k(a) \prod_{j=1}^{k} (\mu_j(a, x) + t),$$

où $\mu_j(a, \lambda) \in \mathbb{R}, \forall j$.
Supposons que $x \in \Gamma_k$. D'après le lemme 1.1.2, $S_k(\lambda + t.a) > 0, \forall t \geq 0$. Alors on déduit de ce formule que $\mu_j(a, x) > 0, \forall j$. Donc $S_j(\lambda) > 0, j = 1, ..., k$. $\square$

Lemme 1.1.4. $\Gamma_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x_i > 0, \forall i = 1, ..., n\}$.

Démonstration. Une inclusion est évidente. Supposons que $x = (x_1, ..., x_n) \in \Gamma_n$. Alors

$$(x_1 + t).(x_2 + t)...(x_n + t) > 0, \forall t \geq 0.$$

On en déduit que $-x_i < 0, \forall i$. $\square$

On voit facilement que $\Gamma_n \subset ... \subset \Gamma_1$.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de tous les matrices hermitiennes de taille $n \times n$. Si $A \in \mathcal{H}$ on pose

$$\widetilde{S}_k(A) = S_k(\lambda(A)),$$

où $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des valeurs propres de A. La fonction $\widetilde{S}_k$ peut être vue comme la somme de tous les mineurs principaux d'ordre k,

$$\widetilde{S}_k(A) = \sum_{|I|=k} A_{II}.$$

On en déduit que $\widetilde{S}_k$ est un polynôme homogène de degré k sur $\mathcal{H}$ qui est hyperbolique par rapport à la matrice identité I. (i.e. pour toute $A \in \widetilde{S}$ l'équation $\widetilde{S}_k(A + tI) = 0$ a n racines réelles (voir [Ga59]). Comme dans [Ga59] (voir aussi [Bl05]), le cône

$$\widetilde{\Gamma}_k := \big\{A \in \mathcal{H} \ / \ \widetilde{S}_k(A + tI) > 0, \forall t \geq 0\big\} = \{A \in \mathcal{H} \ \mid \ \lambda(A) \in \Gamma_k\}$$

est convexe et la fonction $\widetilde{S}_k^{1/k}$ est concave sur $\widetilde{\Gamma}_k$.

1.1.2 Polynômes hyperboliques et inégalité de Gårding

Définition 1.1.5. Soient P un polynôme homogène de degré $k > 0$ en n variables $x = \{x_j\}_1^n$, et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que P est hyperbolique par rapport à a, (ou a-hyperbolique) si l'équation $P(sa + x) = 0$ a k racines réelles pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De façon équivalente,

$$P(a) \neq 0,\ P(sa + x) \neq 0 \text{ si } \mathrm{Im} s \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Si on factorise

$$P(sa + x) = P(a) \prod_{i=1}^{m} (s + \lambda_i(a, x)),$$

alors P est a-hyperbolique si et seulement si $P(a) \neq 0$ et $\lambda_j(a, x) \in \mathbb{R}$ si $1 \leq j \leq k$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 1.1.6. *[Ga59] Soit P un polynôme hyperbolique par rapport à $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors le polynôme*

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial P}{\partial x_j}$$

est hyperbolique par rapport à a. Par conséquent, tous les polynômes P_l définis par

$$P(x + ta) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x) t^{n-j}$$

sont hyperboliques par rapport à a.

Exemple 1.1.7. Toute fonction symétrique élémentaire S_k est a-hyperbolique, avec $a = (1, ..., 1)$.

En assimilant $\mathcal{H}$ avec un espace $\mathbb{R}^N$, le polynôme $\widetilde{S}_k$ est I-hyperbolique, où I est la matrice identité.

Définition 1.1.8. Soit P un polynôme a-hyperbolique de degré k sur $\mathbb{R}^n$. Le cône $C(P, a)$ est définie par

$$C(P, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \ /\ P(ta + x) \neq 0,\ \forall t \geq 0\}.$$

Il est démontré dans [Ga59] que $C(P, a)$ est un cône convexe.

Exemple 1.1.9. $C(S_k, (1, ..., 1)) = \Gamma_k$ et $C(\widetilde{S}_k, I) = \widetilde{\Gamma}_k$.

Définition 1.1.10. Soit P un polynôme a-hyperbolique de degré k sur $\mathbb{R}^n$. La forme polarisation de P est une forme $M(x^1, ..., x^m)$, $x^i \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie les conditions suivantes :
(i) M est linéaire en chaque variable,
(ii) M est invariante par toutes les permutations,
(iii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $M(x, x, .., x) = P(x)$.
Explicitement,

$$M(x^1, ..., x^m) = \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^k \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) P(x).$$

Théorème 1.1.11 (Inégalité de Gårding)**.** *[Ga59] Soit P un polynôme a-hyperbolique de degré $k > 1$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $P(a) > 0$. Soit M la forme polarisation de P. Alors, pour tous $x^1, ..., x^m \in C(P, a)$ on a $P(x^j) > 0,\ \forall j$ et*

$$M(x^1, x^2, ..., x^m) \geq P(x^1)^{1/m} P(x^2)^{1/m} ... P(x^m)^{1/m}.$$

1.1.3 Fonctions m-sousharmoniques

Soient α une (1,1)-forme réelle sur $\mathbb{C}^n$, qui s'écrit comme $\alpha = \frac{i}{\pi}\sum_{j,k} a_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$. La forme de kähler standard sur $\mathbb{C}^n$ s'écrit comme $\beta = \frac{i}{\pi}\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Il est facile de voir que

$$\binom{n}{k}\alpha^k \wedge \beta^{n-k} = \widetilde{S}_k(A)\beta^n, \text{ où } A = [a_{j\bar{k}}].$$

Définition 1.1.12. Soient α une (1,1)-forme réelle sur Ω. On dit que α est m-positive au point $P \in \Omega$ si

$$\alpha^j \wedge \beta^{n-j} \geq 0 \text{ au point } P, \ \forall j = 1, ..., m.$$

On dit que α est m-positive si elle l'est en chaque point de Ω.

L'inégalité de Gårding peut être génégalisée pour les $(1,1)$-formes.

Lemme 1.1.13. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ des (1,1)-formes m-positives sur $\mathbb{C}^n$. On note*

$$(\alpha_j)^m \wedge \beta^{n-m} = h_j \beta^n, \ j = 1, ..., m.$$

Alors

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_m \wedge \beta^{n-m} \geq h_1^{1/m} ... h_m^{1/m}.$$

Soient T un courant sur Ω de bidegré $(n-k, n-k)$ $(k \leq m)$. On dit que T est m-positif si

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k \wedge T \geq 0,$$

pour toutes (1,1)-formes m-positives $\alpha_1, ..., \alpha_k$ sur Ω.

Définition 1.1.14. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite m-shousharmonique (m-sh) si elle est sousharmonique et si

$$dd^c u \wedge \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \tag{1.1.1}$$

pour toutes (1,1)-formes m-positives $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$.
L'ingalité (1.1.1) signifie que le courant $dd^c u \wedge \beta^{n-m}$ est m-positif.
La classe des fonctions m-sousharmoniques dans Ω est notée par $\mathcal{SH}_m(\Omega)$.

Une fonction m-sousharmonique est en particulier sousharmonique. Donc la classe $\mathcal{SH}_m(\Omega)$ a des propriétés basiques comme $\mathcal{SH}(\Omega)$. On les résume dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.15. *[Bl05] (i) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Alors elle est m-sh si et seulement si la forme $dd^c u$ est m-positive en toute point de Ω.*

(ii) Si $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ alors $\lambda u + \mu v \in \mathcal{SH}_m(\Omega), \forall \lambda, \mu > 0$.

(iii) Soit u une fonction m-sh sur Ω. Considérons la suite régularisante standard par convolution avec un noyau lisse $u * \chi_\epsilon$. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, u_ϵ est m-sh sur $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

(iv) Soit $(u_l) \subset \mathcal{SH}_m(\Omega)$ une suite localement uniformément majorée. Alors $(\sup u_l)^* \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, où v^* est la régularisation semi-continue supérieurement de v.

(v) $PSH(\Omega) = \mathcal{SH}_n(\Omega) \subset ... \subset \mathcal{SH}_1(\Omega) = \mathcal{SH}(\Omega)$.

(vi) Soit $\emptyset \neq U \subsetneq \Omega$ un sous-ensemble tel que $\partial U \cap \Omega$ est relativement compact dans Ω. Supposons que $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $v \in \mathcal{SH}_m(U)$ et $\limsup_{x \to y} v(x) \leq u(y)$ pour chaque $y \in \partial U \cap \Omega$. Alors la fonction w, définie par

$$w = \begin{cases} u \ sur \ \Omega \setminus U \\ \max(u, v) \ sur \ U \end{cases},$$

est m-sh sur Ω.

Démonstration. Montrons (i). Une implication est évidente d'après le lemme 1.1.13. Pour démontrer l'autre, supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est m-sousharmonique et fixons $x_0 \in \Omega$. Posons

$$t_0 := \inf\{t \geq 0 \ / \ dd^c u(x_0) + t\beta \text{ est } m\text{-positive}\}.$$

Comme $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on déduit que $t_0 \in \mathbb{R}$. Par définition de t_0, la forme $dd^c u(x_0) + t_0\beta$ est m-positive et on a

$$(dd^c u(x_0) + t_0\beta)^m \wedge \beta^{n-m} = 0.$$

On en déduit que $t_0 = 0$, d'où le résultat.

Les affirmations (ii) et (v) sont évidentes.

Montrons (iii). Soit $\alpha := \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1}$, où α_j sont des (1,1)-formes m-positives à coefficients constants. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\epsilon)$ une fonction test non négative. D'après le théorème de Fubini on obtient

$$\langle dd^c(u * \chi_\epsilon) \wedge \alpha \wedge \beta^{n-m}, \phi \rangle = \int_{\Omega_\epsilon} u * \chi_\epsilon(z) f(z) d\lambda(z) = \iint\limits_{\Omega_\epsilon, B(0,\epsilon)} u(z+y)\chi_\epsilon(y) f(z) d\lambda(y) d\lambda(z)$$

$$= \iint\limits_{B(0,\epsilon),\Omega_\epsilon} u(z+y) f(z)\chi_\epsilon(y) d\lambda(z) d\lambda(y) = \iint\limits_{B(0,\epsilon),\Omega_\epsilon} u(z) f(z-y)\chi_\epsilon(y) d\lambda(z) d\lambda(y) \geq 0,$$

où f est une fonction lisse à support compact dans Ω_ϵ.

Montrons (iv). Soient $\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1}$, où α_j sont des (1,1)-formes m-positives à coefficients constants. On définit l'opérateur $L_\alpha \varphi := dd^c\varphi \wedge \alpha \wedge \beta^{n-m}$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Par un changement linéaire de cordonnées L est un opérateur Laplacien. On en déduit que v^* est L_α-sousharmonique, d'où le résultat.

Montrons (vi). Comme dans (iv), w est L_α-sousharmonique pour toutes $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$ des (1,1)-formes m-positives à coefficients constants. Donc, w est m-sousharmonique. □

Remarque 1.1.16. Si φ est m-sh sur $\mathbb{C}^n$, alors elle est sousharmonique sur tous les sous espaces de dimension $n - m + 1$. L'inverse n'est pas vraie en général. En fait, soit E un sous espace de $\mathbb{C}^n$ défini par $z_1 = z_2 = ... = z_{m-1} = 0$. En prenant $\alpha_j = idz_j \wedge d\bar{z}_j, j = 1, ..., m-1$, on voit que $dd^c(\varphi|_E) \wedge (\beta|_E)^{n-m+1-1} \geq 0$. Elle est donc sousharmonique sur E.

Contrairement aux fonctions psh, les fonctions m-sh sont plus difficiles à manipuler. Elle ne possèdent ni de jolies propriétés de valeurs moyennes ni de propriétés d'invariance par les applications holomorphes.

L'exemple suivant nous montre que les fonctions m-sh ne sont pas invariantes par les applications holomorphes.

Exemple 1.1.17. Considérons $u_\epsilon(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \epsilon^2|z_3|^2$ dans $\mathbb{C}^3$, où $\epsilon > 0$ est une constante. On voit que u_ϵ est 2-sh si et seulement si $\epsilon^2 \leq 1/2$.

Soit $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par $\phi(z) = (z_1, z_2, \frac{1}{\epsilon}z_3)$. La fonction $u_\epsilon \circ \phi(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$ n'est pas 2-sh.

1.1.4 Le problème de Dirichlet

Le théorème d'existence fondamental suivant est dû à Li [Li04].

Théorème 1.1.18. *Soit Ω un domaine bornée dans $\mathbb{C}^n$. Supposons que $\partial\Omega$ est $(m-1)$-pseudoconvexe (cela signifie que la forme de Levi en chaque point $p \in \partial\Omega$ a ses valeurs propres dans le cône Γ_{m-1}). Soient φ une fonction lisse sur $\partial\Omega$ et $0 < f$ une fonction lisse strictement positive dans Ω. Alors le prolème de Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \\ (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

admet une solution lisse u.

Blocki a résolu ce problème de Dirichlet dégénéré :

Théorème 1.1.19. *[Bl05] Soit B la boule d'unité de $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction continue sur ∂B. Alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{SH}_m(B) \cap C(\overline{B}) \\ (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0 \text{ dans } B \\ u = \varphi \text{ sur } \partial B \end{cases}$$

admet une unique solution.

Dinew et Kolodziej ont généralisé ce résultat comme suit :

Théorème 1.1.20. *[DK11] Soient Ω un domaine borné lisse $(m-1)$-pseudoconvexe, φ une fonction continue sur $\partial\Omega$ et $0 \leq f \in L^p(\Omega)$ avec $p > n/m$. Alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = f\beta^n \text{ dans } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution.

Définition 1.1.21. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction m-sousharmonique sur Ω. On dit que u est m-maximale si pour tout $G \Subset \Omega$ un ouvert relativement compact et toute fonction v semi-continue supérieurement sur $\overline{G}$, $v \in \mathcal{SH}_m(G)$ et $v \leq u$ sur ∂G, on a $v \leq u$ dans G.

Théorème 1.1.22. *[Bl05] Soit u une fonction m-sh localement bornée. Alors $H_m(u) = 0$ dans Ω si et seulement si u est m-maximale.*

1.2 L'opérateur hessienne complexe

Dans cette section on utilise la méthode de Bedford et Taylor pour définir l'opérateur Hessien complexe pour des fonctions m-sousharmoniques localement bornées. Puis on montrera que cet opérateur est continu pour les limites décroissantes. On introduit tout d'abord la formule d'intégration par parties et l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg.

1.2.1 Intégration par parties

On a besoins de ce lemme suivant qui est élémentaire dans la théorie des mesures.

Lemme 1.2.1. *Soit $(\mu_j)_j$ une suite de mesures non négatives qui converge faiblement (au sens des mesures de Radon) vers $\mu \geq 0$ sur Ω (i.e., $\forall \varphi \in C_c(\Omega),\ \mu_j(\varphi) \to \mu(\varphi)$). Alors si v est une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s.) à support compact dans Ω, on a*

$$\limsup_{j\to+\infty} \int_\Omega v d\mu_j \leq \int_\Omega v d\mu.$$

Démonstration. Remarquons que, comme v est *s.c.s.*

$$\int_\Omega v d\mu = \inf\Big\{ \int_\Omega \varphi d\mu \ / \ \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega), \varphi \geq v \Big\}, \tag{1.2.1}$$

où $\mathcal{C}_0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω. Fixons $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $v \leq \varphi$. Selon l'hypothèse sur la suite $(\mu_j)_j$ on a

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \varphi d\mu_j = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

On en déduit que

$$\limsup_{j\to+\infty}\int_\Omega v d\mu_j \leq \int_\Omega \varphi d\mu,$$

ce qui achève la preuve en appliquant (1.2.1). $\square$

Proposition 1.2.2. *Soit T un courant m-positif fermé de bidegré $(n-1,n-1)$ sur Ω. Soient u,v deux fonctions m-sousharmoniques bornées sur Ω telles que $u,v\leq 0$ et $\lim_{z\to\partial\Omega} u(z)=0$. Alors on a*

$$\int_\Omega v dd^c u\wedge T \leq \int_\Omega u dd^c v\wedge T. \tag{1.2.2}$$

Supposons de plus que $\lim_{z\to\partial\Omega} v(z)=0$. Alors

$$\int_\Omega v dd^c u\wedge T = \int_\Omega u dd^c v\wedge T. \tag{1.2.3}$$

Démonstration. Fixons $\epsilon>0$ assez petit et $\Omega_1\Subset\Omega$ un sous-ensemble compact tel que

$$K_\epsilon := \overline{\{u<-\epsilon\}} \Subset \Omega_1.$$

Posons $u_\epsilon=\max(u,-\epsilon)$. Alors $u-u_\epsilon$ est à support dans K_ϵ. Considérons une famille de noyaux lisses χ_η. On a $\mathrm{supp}(u-u_\epsilon)*\chi_\eta\Subset\Omega_1$, quand $\eta>0$ suffisamment petit.
Étape 1 : Supposons de plus que v est continue sur Ω_1. Montrons que

$$\int_{\Omega_1} v dd^c u\wedge T \leq \int_{\Omega_1}(u-u_\epsilon) dd^c v\wedge T. \tag{1.2.4}$$

D'après le théorème de convergence monotone on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}(u_\epsilon-u)dd^c v\wedge T &= \lim_{\eta\to0}\int_{\Omega_1}(u_\epsilon-u)*\chi_\eta dd^c v\wedge T = \lim_{\eta\to0}\int_{\Omega_1} v dd^c((u_\epsilon-u)*\chi_\eta)\wedge T\\ &\leq \lim_{\eta\to0}\int_{\Omega_1}(-v)dd^c(u*\chi_\eta)\wedge T \leq \int_{\Omega_1}(-v)dd^c u\wedge T \quad \text{(par le lemme 1.2.1).}\end{aligned}$$

Étape 2 : Montrons que (1.2.4) est valide même si v n'est pas continue. La fonction $u-u_\epsilon$ est semi-continue supérieurement à support compact dans Ω_1. En appliquant le lemme 1.2.1 on obtient

$$\int_{\Omega_1}(u-u_\epsilon)dd^c v\wedge T \geq \limsup_{\eta\to0}\int_{\Omega_1}(u-u_\epsilon)dd^c(v*\chi_\eta)\wedge T. \tag{1.2.5}$$

Ici, η est assez petit de sorte que $v*\chi_\eta$ est lisse dans un voisinage de Ω_1. On applique l'étape 1 avec $v*\chi_\eta$ à la place de v

$$\int_{\Omega_1}(u-u_\epsilon)dd^c(v*\chi_\eta)\wedge T \geq \int_{\Omega_1} v*\chi_\eta dd^c u\wedge T. \tag{1.2.6}$$

On déduit de (1.2.5) et (1.2.6) que

$$\int_{\Omega_1}(u-u_\epsilon)dd^c v\wedge T \geq \limsup_{\eta\to0}\int_{\Omega_1} v*\chi_\eta dd^c u\wedge T = \int_{\Omega_1} v dd^c u\wedge T.$$

Conclusion : À partir de l'inégalité (1.2.4) en faisant $\Omega_1\to\Omega$ puis $\epsilon\to0$ on obtient (1.2.2). Finalement (1.2.3) est une conséquence de (1.2.2). $\square$

1.2.2 Définition de l'opérateur hessien complexe

Lemme 1.2.3. *Soient $u_1, ..., u_k (k \leq m)$ des fonctions m-sousharmoniques localement bornées sur Ω et T un courant m-positif fermé de bidegré $(n-p, n-p)$ $(p \geq k)$. Alors on peut définir par récurrence un courant m-positif fermé*

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T = dd^c (u_1 . dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T).$$

Le produit est symétrie, i.e.

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_p \wedge T = dd^c u_{\sigma(1)} \wedge dd^c u_{\sigma(2)} \wedge ... \wedge dd^c u_{\sigma(k)} \wedge T,$$

pour toute permutation $\sigma : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., k\}$.

En particulier, la mesure de hessien de $\varphi \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ est définie par

$$H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Par définition, chaque courant m-positif est positif, il est donc à coefficients mesures. Étant donnée $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ le courant uT est bien défini, on pose

$$dd^c u \wedge T := dd^c (u.T).$$

Le courant $dd^c u \wedge T$ est m-positif car c'est vrai si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dans le cas général on régularise par une suite de fonctions m-sousharmoniques lisses.

Pour montrer que le produit est symétrique il suffit de considérer le cas $k = 2$. Montrons que

$$dd^c u \wedge dd^c v \wedge T = dd^c v \wedge dd^c u \wedge T,$$

pour $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.

Le problème est local. On régularise u, v par $(u_j), (v_j)$ comme dans la proposition 1.1.15. Les fonctions u_j, v_k étant lisses, pour chaque j, k, on a donc

$$dd^c u_j \wedge dd^c v_k \wedge T = dd^c v_k \wedge dd^c u_j \wedge T.$$

En fixant k et en faisant tendre j vers $+\infty$, on voit que

$$dd^c u \wedge dd^c v_k \wedge T = dd^c v_k \wedge dd^c u \wedge T.$$

Il suffit de montrer que

$$u dd^c v_k \wedge T \rightharpoonup u dd^c v \wedge T.$$

Cette convergence faible sera établie dans la preuve du théorème 1.2.5 ci-dessous. On a besoins tout d'abord d'établir l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg. □

Proposition 1.2.4 (Inégalité de Chern-Levine-Nirenberg)**.** *Soient K un compact de D qui est un ouvert relativement compact de Ω.. Il existe $A > 0$ tel que*

$$\|dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T\|_K \leq A.\|u_1\|_{L^\infty(D)} ... \|u_k\|_{L^\infty(D)} \|T\|_D \tag{1.2.7}$$

et

$$\|v dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T\|_K \leq A.\|u_1\|_{L^\infty(D)} ... \|u_k\|_{L^\infty(D)} \int_D |v| T \wedge \beta^p, \tag{1.2.8}$$

pour toute fonction m-sousharmonique v qui est intégrable par rapport au courant m-positif fermé T de bidegré $(n-p, n-p)$ $(p \leq m)$, et toutes fonctions m-sousharmoniques $u_1, ..., u_k$ (avec $k \leq p$)

Démonstration. On notera $C_1, C_2, ...$ des constantes qui ne dépendent que de K, D. Par récurrence il suffit de démontrer (1.2.7) pour $k = 1$. Fixons une fonction test $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, supp$\chi \subset D$ et $\chi \equiv 1$ sur K. Alors $-C_1\beta \leq dd^c\chi \leq C_1\beta$. On a donc

$$\|dd^c u_1 \wedge T\|_K \leq C_2 \int_K dd^c u_1 \wedge T \wedge \beta^{p-1} \leq C_2 \int_D \chi . dd^c u_1 \wedge T \wedge \beta^{p-1}$$
$$= C_2 \int_D u_1 dd^c\chi \wedge T \wedge \beta^{p-1} \leq C_3 \|u_1\|_{L^\infty(D)} \int_D T \wedge \beta^p \leq C_4 \|u_1\|_{L^\infty(D)} \|T\|_D.$$

Montrons (1.2.8). On peut supposer que
(i) $v \leq 0$ dans D ;
(ii) $K \subset B := B(z_0, r) \Subset D$;
(iii) $-1 \leq u_j \leq 0$ dans D, et $u_j \equiv C\rho$ sur $\bar{B} \setminus B'$, pour tout $j = 1, ..., k$, où $\rho(z) := |z - z_0|^2 - r^2$, et $B' = B(z_0, r')$ avec $r' < r$.
Posons $v_j = \max(v, j\rho)$, c'est une suite bornée de fonctions m-sousharmoniques qui décroît vers v dans B. Chaque v_j est nulle au bord de B. la formule d'intégration par parties (la proposition 1.2.2) nous donne

$$\int_K |v_j| dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k} = \int_K (-v_j) dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k}$$
$$\leq \int_B (-v_j) dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k} = \int_B (-u_1) dd^c v_j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge w^{p-k}$$
$$= \int_{B'} (-u_1) dd^c v_j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k} + \int_{B \setminus B'} (-u_1) dd^c v_j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k}$$
$$\leq \int_{B'} dd^c v_j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k} + \int_{B \setminus B'} dd^c v_j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \beta^{p-k}.$$

Par (1.2.7), la première intégrale de la dernière ligne est dominée par $C_5 \int_B dd^c v_j \wedge T \wedge \beta^{p-1}$. En outre, comme toutes les fonctions $u_j, j = 1, ..., k$ sont égales à $C\rho$ sur l'ouvert $B \setminus B'$, la deuxième intégrale est bornée par $C_6 \int_B dd^c v_j \wedge T \wedge \beta^{p-1}$. On obtient donc

$$\int_K (-v_j) dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \leq C_7 \int_B dd^c v_j \wedge T \wedge \beta^{p-1}.$$

Maintenant, en raisonnant comme dans la preuve de (1.2.7) on obtient

$$\int_B dd^c v_j \wedge T \wedge \beta^{p-1} \leq C_8 \int_D (-v_j) T \wedge \beta^p.$$

Finalement on fait tendre $j \to +\infty$. □

Théorème 1.2.5. *Soient $(u_0^j), ...(u_k^j)$ des suites décroissantes de fonctions m-sousharmonique dans Ω qui convergent vers $u_0, ..., u_k \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ respectivement. Soit T un courant m-positive fermé de bidegré $(n-p, n-p)$ $(m \geq p \geq k)$ sur Ω. Alors*

$$u_0^j . dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_k^j \wedge T \rightharpoonup u_0 . dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T,$$

faiblement au sens des courants.

Démonstration. Par récurrence, il suffit de montrer que si

$$S_j := dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_k^j \wedge T \rightharpoonup S := dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T,$$

alors $u_0^j.S_j$ converge faiblement vers $u_0.S$. La suite de courants $(u_0^j.S_j)_j$ est de masse localement uniformément bornée grâce à l'inégalité CLN. D'après le théorème de Banach Alaoglu elle est relativement compacte dans la topologie faible. Soit Θ un point d'adhérence de cette suite, il suffit de montrer que $\Theta = u_0.S$. D'après le lemme 1.2.6 ci-dessous on a $\Theta \wedge \alpha \leq u_0.S \wedge \alpha$ pour chaque $(p-k,p-k)$-forme α fortement positif.

Montrons que $\int_K (u_0.S - \Theta) \wedge \alpha \leq 0$, pour toute $(p-k,p-k)$-forme α fortement positif et tout compact $K \Subset B(z_0,r) \Subset \Omega$. Sans perte de généralité on peut supposer que $u_i^j \equiv A(|z-z_0|^2 - r^2), \forall i,j$ dans un petit voisinage de ∂B, avec $A >> 1$. la formule d'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}} u_0.S \wedge \alpha \leq \int_{\mathbb{B}} u_0^j dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \alpha = \int_{\mathbb{B}} u_1 dd^c u_0^j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \alpha \\ \leq \int_{\mathbb{B}} u_1^j dd^c u_0^j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \alpha = \int_{\mathbb{B}} u_0^j dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge T \wedge \alpha.\end{aligned}$$

En répétant cet argument k fois on obtient $\int_{\mathbb{B}} u_0.S \wedge \alpha \leq \int_{\mathbb{B}} u_0^j.S_j \wedge \alpha$. La suite de mesures de Radon positives $-u_0^j.S_j \wedge \alpha$ converge faiblement vers $-\Theta \wedge \alpha$. Ceci implique que (en vue que B est ouvert dans Ω) $\liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{B}} -u_0^j.S_j \wedge \alpha \geq \int_{\mathbb{B}} -\Theta \wedge \alpha$. On a donc

$$\int_{\mathbb{B}} -u_0.S \wedge \alpha \geq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{B}} -u_0^j.S_j \wedge \alpha \geq \int_{\mathbb{B}} -\Theta \wedge \alpha.$$

On en déduit que $(u_0.S - \Theta) \wedge \alpha = 0$ car elle est une mesure non négative ayant une masse nulle dans chaque compact de Ω.

Il nous reste à démontrer le lemme suivant. $\square$

Lemme 1.2.6. *Soit (μ_j) une suite de mesures de Radon positives sur Ω qui converge faiblement vers une mesure de Radon positive μ. Supposons que (f_j) est une suite décroissante de fonctions semi-continue supérieurement qui converge vers f sur Ω. Alors tout point d'adhérence ν de la suite $(f_j\mu_j)$ vérifie $\nu \leq f.\mu$ au sens des mesures de Radon sur Ω.*

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ soit $(g_k^j)_j$ une suite de fonctions continues sur Ω qui décroît vers f_k. Fixons $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ une fonction test. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé on a

$$\int \varphi\nu \leq \lim_{j\to+\infty} \varphi g_k^l d\mu_j = \int \varphi g_k^l d\mu.$$

On en déduit, en faisant $l \to +\infty$, que $\int \varphi d\nu \leq \int \varphi f_k d\mu$, d'où le résultat. $\square$

1.3 Capacité et convergence

Définition 1.3.1. Soit E un sous-ensemble de Borel de Ω. On définit

$$\mathrm{Cap}_m(E,\Omega) = \sup\left\{ \int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \ / \ u \in \mathcal{SH}_m(\Omega),\ -1 \leq u \leq 0 \right\},$$

la m-capacité de E par rapport à Ω

Remarque 1.3.2. D'après l'inégalité de CLN, on voit que $\mathrm{Cap}_m(K,\Omega)$ est fini pour chaque compact $K \Subset \Omega$. De plus, $\mathrm{Cap}_m(E,\Omega) \geq C \int_E d\lambda_n$, où C est une constante qui ne dépend que de n et du diamètre de Ω ; et λ_n la forme de volume de $\mathbb{C}^n$.

La proposition suivante est basique et facile à démontrer.

Proposition 1.3.3. *La m-capacité et la capacité de Bedford-Taylor ont des propriétés similaires :*
(i) $Cap_m(E_1,\Omega) \leq Cap_m(E_2,\Omega)$ *si* $E_1 \subset E_2$,
(ii) $Cap_m(E,\Omega) = \lim_{j\to\infty} Cap_m(E_j,\Omega)$ *si la suite est croissante vers* E,
(iii) $Cap_m(E,\Omega) \leq \sum Cap_m(E_j,\Omega)$, *où* $E = \cup E_j$.

Dans la proposition suivante on donnera une estimée de la m-capacité des sous-ensembles de sous niveau.

Proposition 1.3.4. *Soient* K *un compact de* U *qui est un ouvert relativement compact dans* Ω. *Alors, il existe une constante* C *qui dépend de ces ensembles telle que pour toute* $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $u < 0$ *on a*

$$Cap_m\big(K \cap \{u < -j\}, \Omega\big) \leq \frac{C}{j}\|u\|_{L^1(U)}.$$

Démonstration. Fixons $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $-1 \leq v \leq 0$. On déduit de l'inégalité (CLN) que

$$\int_{K\cap\{u<-j\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \frac{1}{j}\int_K |u|(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \frac{C}{j}\|u\|_{L^1(U)},$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 1.3.5. Soient (u_j) une suite de fonctions et u une fonction définies sur Ω. On dit que u_j converge vers u en m-capacité si pour tout $t > 0$ et $K \Subset \Omega$ on a

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Cap}_m(K \cap \{|u - u_j| > t\}) = 0.$$

Proposition 1.3.6. *Soit* (u_j) *une suite de fonctions m-sousharmoniques localement bornées sur* Ω *qui décroît vers* $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$. *Alors* u_j *converge vers* u *en* m*-capacité.*

Démonstration. Fixons $K \Subset \Omega$, et $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $0 < v < 1$. Sans perte de généralité on peut supposer que Ω est une boule et (u_j) sont égales dans un petit voisinage de ∂B, où B est une autre boule telle que $K \Subset B \Subset \Omega$. On peut également supposer que $-1 < u_j < 0$ sur B. Soient $u_j^\epsilon, u^\epsilon, v^\epsilon$ des suites régularisantes de u_j, u, v. Les fonctions $u_j^\epsilon - u^\epsilon$ sont lisses à support compact dans B. D'après la formule de Stokes et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_B (u_j^\epsilon - u^\epsilon)(dd^c v^\epsilon)^{m-k} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\\
&= -\int_B d(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge d^c v^\epsilon \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\\
&\leq \Big(\int_B d(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge d^c(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\Big)^{1/2}\\
&\times \Big(\int_B dv^\epsilon \wedge d^c v^\epsilon \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En observant que $dv^\epsilon \wedge d^c v^\epsilon \leq dd^c(v^\epsilon)^2$, on obtient

$$\int_B dv^\epsilon \wedge d^c v^\epsilon \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m} \leq m^m \mathrm{Cap}_m(B,\Omega).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_B d(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge d^c(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\\
= &-\int_B (u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge dd^c(u_j^\epsilon - u^\epsilon) \wedge (dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^k \wedge \beta^{n-m}\\
\leq &\int_B (u_j^\epsilon - u^\epsilon)(dd^c v^\epsilon)^{m-k-1} \wedge (dd^c u^\epsilon)^{k+1} \wedge \beta^{n-m}
\end{aligned}$$

En conclusion on a $I_k \leq C.\sqrt{I_{k+1}}$, où C est une constante positive. Ceci implique que

$$I_0 \leq C'\Big(\int_B (u_j^\epsilon - u^\epsilon)(dd^c u^\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m}\Big)^{1/2^m}$$

Maintenant, en faisant $\epsilon \downarrow 0$, on voit que

$$\int_B (u_j - u)(dd^c v)^m \wedge w^{n-m} \leq C' \int_{\overline{B}} (u_j - u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Cette inégalité est validé pour toute $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega),\ 0 < v < 1$, donc pour chaque $t > 0$,

$$\mathrm{Cap}_m(K \cap \{u_j - u > t\}, \Omega) \leq \frac{C'}{t}\int_{\overline{B}} (u_j - u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Théorème 1.3.7.
Soient $\{u_k^j\}_{j=1}^\infty$ des suites localement uniformément bornées de fonctions m-sousharmoniques dans Ω avec $k = 1, 2, ..., m$. Supposons que, pour chaque $k = 1, ..., m$, $u_k^j \to u_k \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ en m-capacité quand $j \to \infty$. Alors on a une convergence au sens des mesures de Radon :

$$dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} \to dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que toutes les fonctions concernées sont à valeurs dans $[0, 1]$. En utilisant l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_m \wedge w^{n-m} - dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m} \\ &\qquad = \sum_j dd^c u^1 \wedge dd^c u_2 \wedge ... \wedge dd^c u_{j-1} \wedge dd^c(v_j - u_j) \wedge dd^c v_{j+1} \wedge ... \wedge dd^c v_m \wedge \beta^{n-m}, \end{aligned}$$

on se ramène à démontrer que $dd^c(u_j - u) \wedge T_j \to 0$ si $u_j \to u$ en m-capacité et les T_j sont de la forme $dd^c v_1^j \wedge ... \wedge dd^c v_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}$ avec $v_s^j \in \mathcal{SH}_m(\Omega), -1 \leq v_s^j < 0$.

Fixons $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ une fonction test à support dans $K \Subset \Omega$. Pour chaque $t > 0$ posons $E_j(t) = K \cap \{|u_j - u| > t\}$. On note d la diamètre de Ω. On a

$$\begin{aligned} |\int_K \varphi dd^c(u_j - u) \wedge T_j| &= |\int_K (u_j - u) dd^c\varphi \wedge T_j| \\ &\leq |\int_{E_j(t)} (u_j - u) dd^c\varphi \wedge T_j| + t|\int_K dd^c\varphi \wedge T_j| \\ &\leq C.\Big(\int_{E_j(t)} \beta \wedge T_j + t\int_K \beta \wedge T_j\Big) \\ &\leq C.d\int_{E_j(t)} dd^c\rho \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\ &+ Ct.\int_K dd^c\rho \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \\ &\leq C\Big(m^m \mathrm{Cap}_m(E_j(t), \Omega) + t\mathrm{Cap}_m(K, \Omega)\Big), \end{aligned}$$

où $C > 0$ désigne une constante qui ne dépend que de d, φ; ρ est un potentiel de β. Maintenant, en faisant $t \downarrow 0$ et $j \to \infty$ on obtient le résultat. □

Dans le théorème suivant on montrera que toute fonction m-sousharmonique est quasi continue par rapport à la m-capacité.

Théorème 1.3.8. *Soit u une fonction m-sousharmonique sur Ω, et $\epsilon > 0$. Alors, il existe un ouvert $U \subset \Omega$ tel que $Cap_m(U, \Omega) < \epsilon$ et la restriction de u à $\Omega \setminus U$ est continue.*

Démonstration. Fixons un compact $K \Subset \Omega$. On déduit de la proposition 1.3.4 qu'il existe $M > 0$ tel que la m-capacité de l'ensemble $U_1 = K \cap \{u < -M\}$ est inférieure à $\epsilon/2$. Considérons maintenant u_j la suite régularisante de $\max(u, -M)$. On sait que u_j converge vers u en m-capacité. Pour chaque nombre entier $k > 1$ il existe $j(k)$ tel que

$$\mathrm{Cap}_m(U_k, \Omega) < \epsilon 2^{-k},$$

où $U_k := K \cap \{u_{j(k)} > u + 1/k\}$. La suite $u_{j(k)}$ convergent uniformément vers u sur $K \setminus \cup U_k$ où u est donc continue. Pour achever la preuve il suffit de prendre une suite d'exhaustion de compacts $K_j \uparrow \Omega$ et d'appliquer ce que on a fait ci-dessus pour trouver $U_j \subset K_j$ avec $\mathrm{Cap}_m(U_j, \Omega) < \epsilon 2^{-j}$ tel que u restreint à $K_j \setminus U_j$ est continue. Donc u est continue sur le complément de $U = \cup U_j$ dans Ω. La sous-additivité de la m-capacité nous donne $\mathrm{Cap}_m(U, \Omega) < \epsilon$. □

Corollaire 1.3.9. *Soit $\mathcal{U}$ une famille localement uniformément bornée de fonctions m-sousharmoniques sur Ω. Supposons que T_j, T sont des courants de type $dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}$ avec $u_j \in \mathcal{U}, \forall j$, et $T_j \rightharpoonup T$. Alors pour toute $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ on a $uT_j \rightharpoonup uT$.*

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$ et une fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ à support dans $K \Subset \Omega$. On peut trouver v une fonction continue sur Ω telle que $\mathrm{Cap}_m(\{u \neq v\}, \Omega) < \epsilon$. On a

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \phi u T_j - \int_\Omega \phi u T| &\leq |\int_\Omega \phi(u-v)T_j| + |\int_\Omega \phi(u-v)T| + |\int_\Omega \phi v T_j - \int_\Omega \phi v T| \\ &\leq A\|\phi(u-v)\|_K \mathrm{Cap}_m(\{u \neq v\}, \Omega) + |\int_\Omega \phi v T_j - \int_\Omega \phi v T| \\ &\leq A\epsilon \|\phi(u-v)\|_K + |\int_\Omega \phi v T_j - \int_\Omega \phi v T|, \end{aligned}$$

où A est une constante qui ne dépend que de ϕ. En faisant $\limsup_{j\to+\infty}$ et $\epsilon \to 0$ on obtient le résultat. □

D'après le théorème 1.2.5 l'opérateur hessien complexe est continue pour les limites décroissantes. On montrera qu'il l'est pour les suites croissantes.

Théorème 1.3.10. *Soient $\{u_k^j\}_{j=1}^\infty$ des suites localement uniformément bornées de fonctions m-sousharmoniques dans Ω pour $k = 1, 2, ..., N \leq m$. Supposons que $u_k^j \uparrow u_k \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ presque partout quand $j \to \infty$, $k = 1, 2, ..., N$. Alors*

$$dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_N^j \wedge \beta^{n-m} \rightharpoonup dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_N \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur N avec une an observation que l'affirmation est validée pour $N = 1$. Suppose que pour $N < m$ on a

$$T_j = dd^c u_1^j \wedge \wedge dd^c u_N^j \wedge \beta^{n-m} \rightharpoonup dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_N \wedge \beta^{n-m}.$$

Il suffit de prouver que $v_j T_j \rightharpoonup vT$ si $v_j, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ uniformément bornées et $v_j \uparrow v$. Le problème est locale, on peut supposer que $\Omega = B$ et toutes les fonctions concernées sont égales à ρ sur un petit voisinage de B, où ρ est la fonction définissante de B. D'après le corollaire 1.3.9 on a $\limsup v_j T_j \leq \limsup v T_j = vT$. Montrons maintenant que

$$\liminf_{j\to+\infty} \int_B v_j T_j \wedge \alpha \geq \int_B vT \wedge \alpha,$$

pour toute $(m-N, m-N)$-forme α fortement positive. On obtient la dernière inégalité en appliquant le corollaire 1.3.9 et utilisant la formule de Stokes de manière suivante :

$$\begin{aligned}&\liminf \int_B v_j T_j \wedge \alpha \geq \liminf_{j\to\infty} \int_B v_s T_j \wedge \alpha = \int_B v_s T \wedge \alpha\\ &= \int_B v_s dd^c u_1 \wedge S_1 \wedge \alpha = \int_B u_1 dd^c v_s \wedge \alpha \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \int_B u_1 dd^c v \wedge S_1 \wedge \alpha = \int_B vT \wedge \alpha.\end{aligned}$$

La convergence dans la dernière ligne (quand $s \to \infty$) se déduit de l'hypothèse de récurrence et du corollaire 1.3.9. $\square$

Corollaire 1.3.11. *Soit (u_j) une suite monotone localement uniformément bornée de fonctions m-sousharmoniques sur Ω qui converge presque partout vers $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$. Supposons que f, f_j sont des fonctions quasi continues localement bornées, f_j est monotone et converge vers f presque partout. Alors*

$$f_j(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \to f(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que les fonctions u_j, u sont à valeurs dans $[-1, 0]$. Fixons une fonction test $\chi \in C_c(\Omega)$ à support dans $K \Subset \Omega$. Pour chaque $\epsilon > 0$ fixé, il existe un ouvert G tel que $\mathrm{Cap}_m(G, \Omega) < \epsilon$ et tel que f_j, f sont continues sur $\Omega \setminus G$. La monotonie de la suite (f_j) entraîne que la convergence de (f_j) sur $K \setminus G$ est uniforme. On a donc l'estimée suivante

$$\begin{aligned}&\int_K |(f_j - f)\chi|(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \leq\\ &\leq \|(f_j - f)\chi\|_{K\setminus G} \int_K (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} + \|(f_j - f)\chi\|_K \int_G (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}\\ &\leq \|(f_j - f)\chi\|_{K\setminus G} \mathrm{Cap}_m(K, \Omega) + \|(f_j - f)\chi\|_K \mathrm{Cap}_m(G, \Omega).\end{aligned}$$

En prenant $\limsup_{j\to\infty}$ et faisant $\epsilon \to 0$ on obtient

$$\int_K |(f_j - f)\chi|(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En combinant ceci avec le corollaire 1.3.9, on obtient le résultat. $\square$

Théorème 1.3.12. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$, $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$. Alors*

$$\mathbb{1}_{\{u>v\}}(dd^c \max(u, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbb{1}_{\{u>v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. L'affirmation est triviale si u est continue. Le problème est locale. On travaille sur un ouvert $\Omega_1 \Subset \Omega$ où la suite régularisante u_j de u est bien définie. On a alors

$$\mathbb{1}_{\{u_j>v\}}(dd^c \max(u_j, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \mathbb{1}_{\{u_j>v\}}(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Posons $\psi_j := \max(u_j - v, 0) \downarrow \psi := \max(u - v, 0)$. Elles sont quasi continues bornées sur Ω_1. On a donc

$$\psi_j(dd^c \max(u_j, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \psi_j(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

En appliquant le corollaire 1.3.11, on obtient

$$\psi(dd^c \max(u, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \psi(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Pour chaque $\epsilon > 0$ on a

$$\frac{\psi}{\psi + \epsilon}(dd^c \max(u, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \frac{\psi}{\psi + \epsilon}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Maintenant en faisant $\epsilon \to 0$ on obtient le résultat. $\square$

Le théorème 1.3.12 est souvent appelé le principe du maximum. On en déduit le principe de comparaison :

Corollaire 1.3.13. *Soient* $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ *telles que* $\liminf_{z\to\partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq 0$. *Alors*

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Pour chaque ϵ considérons $u_\epsilon := u + \epsilon$. Comme $u_\epsilon > v$ en dehors d'un compact que l'on note $K \Subset \Omega$, on a

$$\int_\Omega (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Fixons un ouvert relativement compact U tel que $K \Subset U \Subset \Omega$. En utilisant le principe du maximum on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u_\epsilon<v\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{\{u_\epsilon<v\}} (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_U (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} - \int_{U\cap\{u_\epsilon\geq v\}} (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_U (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} - \int_{U\cap\{u_\epsilon\geq v\}} (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq \int_U (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} - \int_{U\cap\{u_\epsilon> v\}} (dd^c \max(u_\epsilon, v))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_U (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} - \int_{U\cap\{u_\epsilon> v\}} (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_{\{u_\epsilon\leq v\}} (dd^c u_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{\{u+\epsilon\leq v\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}
\end{aligned}$$

Il suffit de faire $\epsilon \to 0$. □

Corollaire 1.3.14. *Soient* $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ *telles que* $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}$ *et* $\liminf_{z\to\partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geq 0$. *Alors* $u \geq v$ *sur* Ω.

Démonstration. Considérons $v_\epsilon := v + \epsilon\rho$, où $\rho(z) := |z|^2 - R^2$ avec $R \gg 1$ suffisamment grand de sorte de que $\rho \leq 0$ sur Ω. Le corollaire 1.3.13 nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\{u<v_\epsilon\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \quad & \int_{\{u<v_\epsilon\}} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \int_{\{u<v_\epsilon\}} (dd^c v_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m} \\
& \geq \int_{\{u<v_\epsilon\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} + \epsilon^m \int_{\{u<v_\epsilon\}} \beta^n.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\int_{\{u<v_\epsilon\}} \beta^n = 0$. Par conséquent, $u \geq v_\epsilon$ presque partout donc partout dans Ω. Maintenant on termine la preuve en faisant $\epsilon \to 0$. □

On déduit immédiatement le corollaire suivant

Corollaire 1.3.15. *Soient* $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$ *telles que* $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}$ *et* $\lim_{z\to\partial\Omega}(u(z) - v(z)) = 0$. *Alors* $u = v$ *sur* Ω.

Théorème 1.3.16. *Soient* $u, v \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$. *Alors*

$$(dd^c \max(u, v))^m \wedge \beta^{n-m} \geq \mathbb{1}_{\{u\geq v\}}(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + \mathbb{1}_{\{u<v\}}(dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Pour chaque compact $K \subset \{u = v\}$ on a (en appliquant le principe du maximum) :

$$\int_K (dd^c \max(u,v))^m \wedge \beta^{n-m} \geq \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \int_K (dd^c \max(u, v+\epsilon))^m \wedge \beta^{n-m}$$
$$= \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \int_K \mathbb{I}_{\{u<v+\epsilon\}} (dd^c \max(u, v+\epsilon))^m \wedge \beta^{n-m}$$
$$= \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \int_K \mathbb{I}_{\{u<v+\epsilon\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_K (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Encore, on applique le principe du maximum pour obtenir le résultat. □

1.4 La fonction m-extrémale

Dans ce paragraphe on introduit la notion de fonction m-sh extrémale relative. On établit ses propriétés élémentaires et on donne quelques exemples. On exprime la m-capacité d'un compact $K \Subset \Omega$ à l'aide de sa fonction m-extrémale.

Définition 1.4.1. Soit E un sous-ensemble de Ω. On définit la fonction m-extrémale de E par rapport à Ω par

$$u_{m,E,\Omega} = u_{m,E} := \sup\{u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \ / \ u \leq 0, \text{ et } u \leq -1 \text{ sur } E\}.$$

D'après la proposition 1.1.15 $u^*_{m,E,\Omega}$ est m-sousharmonique sur Ω.

Proposition 1.4.2. *La fonction m-sh extrémale a les propriétés suivantes :*
(i) Si $E_1 \subset E_2$ *alors* $u_{m,E_2} \leq u_{m,E_1}$;
(ii) Si $E \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$ *alors* $u_{m,E,\Omega_2} \leq u_{m,E,\Omega_1}$;
(iii) Si $K_j \downarrow K$, *avec* K_j *compact dans* Ω *alors* $(\lim u^*_{m,K_j,\Omega})^* = u^*_{m,K,\Omega}$.

Démonstration. Les deux premières affirmations et l'inégalité $\leq$ de la troisième sont évidentes. Pour le reste, soit $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $u \leq 0$ sur Ω et $u \leq -1$ sur K. Pour chaque $\epsilon > 0$ l'ouvert $U_\epsilon := \{u - \epsilon < -1\}$ contient tous les compact K_j avec j suffisamment grand car il contient K. Cela signifie que $u - \epsilon \leq u^*_{m,K_j,\Omega}$ pour j assez grand. En faisant $j \to \infty$ on obtient

$$(\lim_{j \to +\infty} u^*_{m,K_j,\Omega})^* \geq u - \epsilon;$$

et elle est vrai pour tout $\epsilon > 0$ et toute $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $u \leq 0$ et $u \leq -1$ sur K. Ceci achève la preuve. □

Lemme 1.4.3. *Soient* $0 < r < R$ *et on note* $a = \frac{n}{m} > 1$. *La fonction m-extrémale* $u_{m,\overline{B}(r),B(R)}$ *est donnée par*

$$u(z) = \max\Big(\frac{R^{2-2a} - \|z\|^{2-2a}}{r^{2-2a} - R^{2-2a}}, -1\Big).$$

Démonstration. La fonction u définie ci-dessus est évidemment continue sur $\mathbb{C}^n$, elle est identiquement -1 dans $\overline{B}(r)$ et zero au bord $\partial B(R)$. Considérons la fonction v définie par

$$v(z) = \frac{R^{2-2a} - \|z\|^{2-2a}}{r^{2-2a} - R^{2-2a}}$$

Fixons $z_0 \in B(R) \setminus \{0\}$. On calcule

$$\frac{\partial^2 v(z_0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{(a-1)\|z\|^{-2a}}{r^{2-2a} - R^{2-2a}} \Big(\delta_{jk} - a\frac{\bar{z}_j z_k}{\|z\|^2}\Big).$$

Les valeurs propres de la matrice $\delta_{jk} - a\frac{\bar{z}_j z_k}{\|z\|^2}$ sont $\lambda = (1, ..., 1, 1-a)$. On a

$$S_k(\lambda) = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + (1-a)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\Big(\frac{n}{k} - \frac{n}{m}\Big).$$

Par conséquent, $S_k(\lambda) > 0, \forall k < m$ et $S_m(\lambda) = 0$. On conclut que la fonction u est m-sousharmonique et sa mesure hessienne vaut zero dans $B(R) \setminus \overline{B(r)}$.D'après le principe de comparaison la fonction u est m-extrémale. $\square$

Définition 1.4.4. On dit que Ω est m-hyperconvexe s'il existe une fonction m-sousharmonique continue $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^-$ telle que $\{\rho < -c\} \Subset \Omega$ pour tout $c > 0$.

Proposition 1.4.5. *Si Ω est m-hyperconvexe et E est relativement compact dans Ω alors*

$$\lim_{z\to w} u_{m,E,\Omega}(z) = 0, \ \forall w \in \partial\Omega.$$

Démonstration. Soit $\rho < 0$ une fonction d'exhaustion de Ω. Il existe un $M > 0$ tel que $M\rho < -1$ sur E. On a $M\rho \leq u_{m,E,\Omega}$. Il est clair que $\lim_{z\to\partial\Omega} \rho(z) = 0$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.4.6. *Soit Ω un domaine m-hyperconvexe et $K \Subset \Omega$ un compact tel que $u^*_{m,K,\Omega} \equiv -1$ sur K. Alors $u_{m,K,\Omega}$ est continue sur Ω.*

Démonstration. On note $u = u_{m,K,\Omega}$ et on choisit ρ une fonction définissante de Ω telle que $\rho < -1$ sur K. On a donc $\rho \leq u$ sur Ω. Il suffit de vérifier que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une fonction continue v sur Ω telle que $v \leq u \leq v + \epsilon$ sur Ω. Pour cela, prenons $\epsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $u - \epsilon < \rho$ dans $\Omega \setminus \Omega_\eta$ et tel que $K \subset \Omega_\eta$, où

$$\Omega_\eta = \{z \in \Omega \ / \ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \eta\}.$$

On peut trouver $\delta > 0$ tel que $u * \chi_\delta - \epsilon < \rho$ sur $\partial\Omega_\eta$ et tel que $u * \chi_\delta - \epsilon < -1$ on K. On considère

$$v = \begin{cases} \rho & \text{dans } \ \Omega \setminus \Omega_\eta \\ \max\{u * \chi_\delta - \epsilon, \rho\} & \text{dans } \ \Omega_\eta \end{cases}$$

On voit facilement que v est continue, m-sousharmonique dans Ω et elle appartient à la famille de fonctions définissant u. Par conséquent, $u - \epsilon \leq v \leq u$. $\square$

Proposition 1.4.7. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ et E un sous-ensemble de Ω. Alors $u^*_{m,E,\Omega} \equiv 0$ si et seulement s'il existe $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega), v < 0$ telle que $E \subset \{v = -\infty\}$.*

Démonstration. On note $u = u_{m,E,\Omega}$. Soit $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $v < 0$ et $E \subset \{v = -\infty\}$. Alors $\epsilon v \leq u, \ \forall \epsilon > 0$. Par conséquent, $u = 0$ presque partout et donc $u^* \equiv 0$.

Supposons maintenant que $u^* \equiv 0$. Il existe $a \in \Omega$ tel que $u(a) = 0$ car $u = u^*$ presque partout. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$ il existe $v_j \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $v_j \leq 0$ dans Ω, $v_j \leq -1$ dans E et $v_j(a) > -2^{-j}$. Considérons

$$v(z) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(z).$$

On voit sans difficulté que $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$, $v < 0$ et $E \subset \{v = -\infty\}$. $\square$

Corollaire 1.4.8. *Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et $E = \bigcup_j E_j$, où $E_j \subset \Omega$, $j = 1, 2, ...$ Si $u^*_{m,E_j,\Omega} \equiv 0, \forall j$ alors $u^*_{m,E,\Omega} \equiv 0$.*

Démonstration. Utilisons la proposition 1.4.7 pour choisir $v_j \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telles que $v_j < 0$ et $v_j \equiv -\infty$ sur E_j. Prenons un point $a \in \Omega$ tel que $v_j(a) > -\infty, \forall j$. On peut supposer que $v_j(a) > -2^{-j}, \forall j$. On voit facilement que $v = \sum_j v_j$ est négative, m-sousharmonique et $v \equiv -\infty$ sur E. En appliquant la proposition 1.4.7 on obtient $u^*_{m,E,\Omega} \equiv 0$. $\square$

Proposition 1.4.9. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine m-hyperconvexe et $K \Subset \Omega$ un compact qui est l'union de boules fermées. Alors $u^*_{m,K,\Omega} = u_{m,K,\Omega}$ est continue. En particulier, si $K \subset \Omega$ est compact et si $0 < \epsilon < dist(K, \partial\Omega)$ alors $u_{m,K_\epsilon,\Omega}$ est continue, où*

$$K_\epsilon = \{z \in \Omega \ / \ dist(z, K) \leq \epsilon\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $u = u_{m,K,\Omega}$ est continue sur ∂K. Soit $b \in \partial K$. On peut choisir $a \in K$ et $0 < r < R$ tels que $b \in \overline{B}(a, r) \subset K$ et $B(a, R) \subset \Omega$. Maintenant si $z \in B(0, R)$ on a

$$u(z) \leq u_{m,\overline{B}(a,r),B(a,R)}(z).$$

D'après le lemme 1.4.3 on a $\lim_{z\to b} u_{m,\overline{B}(a,r),B(a,R)}(z) = -1$. Pour la seconde affirmation il suffit de noter que $K_\epsilon = \cup_{a\in K}\overline{B}(a, \epsilon)$. □

On déduit de la proposition 1.4.2 et la proposition 1.4.9 que :

Corollaire 1.4.10. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine m-hyperconvexe et $K \Subset \Omega$ un compact. Alors*

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_{m,K_\epsilon,\Omega} = u_{m,K,\Omega}.$$

En particulière, $u_{m,K,\Omega}$ est semi-continue inférieurement.

Proposition 1.4.11. *Si $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ est un domaine m-hyperconvexe et $K \Subset \Omega$ est compact, alors $u^*_{m,K,\Omega}$ est m-maximale dans $\Omega \setminus K$.*

Démonstration. On utilise la méthode de balayage. D'après le corollaire 1.4.10, la proposition 1.4.9 et le théorème 1.3.10, on peut supposer que $u = u_{m,K,\Omega}$ est continue. On fixe $B = \overline{B}(a, r) \subset \Omega \setminus K$, et définit

$$v = \begin{cases} \psi \text{ dans } B \\ u \text{ dans } \Omega \setminus B \end{cases}$$

où ψ est l'unique solution du problème de Dirichlet (voir le théorème 1.1.19) :

$$\begin{cases} \psi \in \mathcal{SH}(B) \cap C(\overline{B}) \\ (dd^c\psi)^m \wedge \beta^{n-m} = 0 \text{ dans } B \\ \psi = u \text{ sur } \partial B. \end{cases}$$

On voit facilement que $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$. Or, v appartient à la famille de fonctions définissantes de u, on a donc $v \leq u$ dans Ω. Ceci implique que $u = \psi$ dans B, d'où le résultat. □

Théorème 1.4.12. *Soient $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ un domaine m-hyperconvexe et $K \Subset \Omega$ un compact et on note $u = u_{m,K,\Omega}$. Alors*

$$Cap_m(K, \Omega) = \int_K (dd^c u^*)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

De plus, si $u^* > -1$ sur K alors $Cap_m(K, \Omega) = 0$.

Démonstration. Soit ρ une fonction d'exhaustion de Ω telle que $\rho < -1$ sur K. On fixe $\epsilon \in (0, 1)$ et $v \in \mathcal{SH}(\Omega, (0, 1 - \epsilon))$. En vue de la proposition 1.4.9 et du corollaire 1.4.10, on peut trouver une suite croissante $\{u_j\} \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{SH}(\Omega, [-1, 0])$ qui converge vers u. On peut supposer que $u_j \geq \rho$ dans Ω. On a

$$K \subset \{u_j < v - 1\} \subset \{\rho < v - 1\} \subset \{\rho < -\epsilon\}.$$

Le principe de comparaison nous donne

$$\int_K (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u_j<v-1\}} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{u_j<v-1\}} (dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

D'après le théorème 1.3.10 on a

$$(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \underset{j\to+\infty}{\rightharpoonup} (dd^c u^*)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Par conséquent,

$$\int_K (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \le \int_{\overline{\{\rho<-\epsilon\}}} (dd^c u^*)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Selon la proposition 1.4.11 on a

$$\int_{\overline{\{\rho<-\epsilon\}}} (dd^c u^*)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_K (dd^c u^*)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Reste à observer que pour chaque $\epsilon \in (0,1)$ on a

$$\mathrm{Cap}_m(K,\Omega) = (1-\epsilon)^{-m} \sup\Big\{ \int_K (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m} \ / \ v \in \mathcal{SH}(\Omega,(0,1-\epsilon))\Big\}.$$

Pour la second affirmation on peut supposer que $u^* > -1+\epsilon$ sur K. On a donc

$$\mathrm{Cap}_m(K,\Omega) \ge \int_K (dd^c(\frac{u^*}{1-\epsilon}))^m \wedge \beta^{n-m} = (1-\epsilon)^{-m}\mathrm{Cap}_m(K,\Omega),$$

ce qui n'est possible que si $\mathrm{Cap}_m(K,\Omega) = 0$. □

Corollaire 1.4.13. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine m-hyperconvexe et U est un ouvert relativement compact de Ω, alors*

$$Cap_m(U,\Omega) = \int_\Omega (dd^c u_{m,U,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Prenons une suite croissante de compacts K_j telle que $\cup_j K_j = U$ et $u_{m,K_j,\Omega}$ est continue. On a donc $\lim_{j\to\infty} u_{m,K_j,\Omega} = u_{m,U,\Omega} = u^*_{m,U,\Omega}$. Le résultat est maintenant une conséquence du théorème 1.4.12 et théorème 1.3.10. □

On calcule la m-capacité de la boule.

Exemple 1.4.14. Soient $0 < r < R$. On a

$$Cap_m(B(r),B(R)) = \frac{2^n(n-m)}{m.n!(r^{2-2a} - R^{2-2a})^m}.$$

Démonstration. Posons

$$u = u_{m,B(r),B(R)} = \max\Big(\frac{R^{2-2a} - \|z\|^{2-2a}}{r^{2-2a} - R^{2-2a}}; -1\Big); v(z) = \max(-\|z\|^{2-2a}, -r^{2-2a}).$$

Considérons $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ définie par $\chi(t) = (-t)^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{1-a}$. On a

$$\mathrm{Cap}_m(B(r),B(R)) = \int_{B(R)} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = (r^{2-2a} - R^{2-2a})^{-m} \int_{B(R)} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Montrons que

$$\int_{B(R)} (dd^c \chi\circ v)^m \wedge \beta^{n-m} = \chi'(-R^{2-2a})^m \int_{B(R)} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et considérons la fonction convexe croissante χ_ϵ qui est égale à χ dans $[s, 0)$ et égale à une fonction linéaire à pente $\chi'(s)$ dans $(-\infty, s)$, où $s = -(R-\epsilon)^{2-2a}$. D'après la formule de Stokes on a

$$\begin{aligned}\int_{B(R)} (dd^c\chi \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} &= \int_{B(R)} (dd^c\chi_\epsilon \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &\geq \int_{B(R-\epsilon)} (dd^c\chi_\epsilon \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &= (\chi'(s))^m \int_{B(R-\epsilon)} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.\end{aligned}$$

De façon similaire, en prenant $\tilde{\chi}_\epsilon$ égale à χ dans $(-\infty, s)$ et linéaire dans $[s, 0)$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B(R-\epsilon)} (dd^c\chi \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} &\leq \int_{B(R)} (dd^c\tilde{\chi}_\epsilon \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} \\ &= (\chi'(s))^m \int_{B(R)} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.\end{aligned}$$

Maintenant en faisant $\epsilon \to 0$, on obtient

$$\int_{B(R)} (dd^c\chi \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} = \chi'(-R^{2-2a})^m \int_{B(R)} (dd^c v)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Encore, d'après la formule de Stokes, on a

$$\int_{B(R)} (dd^c\chi \circ v)^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{B(R)} (dd^c(\max(\|z\|^2, r^2))^m \wedge \beta^{n-m} = \int_{B(R)} \beta^n = \frac{2^n R^{2n}}{n!},$$

d'où le résultat. □

1.5 Ensembles m-négligeables et m-polaires

Dans ce paragraphe on introduit les notions d'ensembles m-négligeables et m-polaires. On montrera que ce type d'ensemble est de m-capacité nulle.

Définition 1.5.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{U} \subset \mathcal{SH}_m(\Omega)$ une famille de fonctions localement majorées. On définit

$$u(z) = \sup\{v(z) \ / \ v \in \mathcal{U}\}.$$

Un ensemble de type $\mathcal{N} = \{z \in \Omega \ / \ u(z) < u^*(z)\}$ et tous ces sous-ensembles sont appelés m-négligeables.

Théorème 1.5.2. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, et $\mathcal{N}$ un ensemble Borel m-négligeable de Ω. Alors $Cap_m(\mathcal{N}, \Omega) = 0$.*

Démonstration. On fixe $\epsilon > 0$. D'après le lemme de Choquet on peut supposer que $\mathcal{N}$ est de type

$$\mathcal{N} = \{z \in \Omega \ / \ u(z) < u^*(z)\},$$

où $u = \sup_{j \in N} u_j$, et (u_j) est une suite de fonctions dans $\mathcal{U}$. On peut supposer également que $u < 0$ et $\mathcal{N} \subset B \Subset \Omega$, où B est une boule fermée. Les fonctions u_j étant m-sousharmoniques, on peut trouver un ouvert $U \subset \Omega$ à petite capacité $\mathrm{Cap}_m(U, \Omega) < \epsilon$ tel que les u_j sont continues par restriction à $F = \Omega \setminus U$. On définit

$$A = \{(\alpha, \beta) \ / \ \alpha < \beta \leq 0; \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}.$$

Pour chaque $(\alpha, \beta) \in A$ on considère

$$K_{\alpha,\beta} = \{z \in F \cap B \ / \ u(z) \leq \alpha < \beta \leq u^*(z)\}.$$

Chaque $K_{\alpha,\beta}$ est compact ou vide. Il faut noter également que $(-\alpha)^{-1}u \leq u_{m,K_{\alpha,\beta},\Omega}$ dans Ω. Par conséquent, dans $K_{\alpha,\beta}$ on a

$$-1 < (-\alpha)^{-1}\beta \leq (-\alpha)^{-1}u^* \leq u^*_{m,K_{\alpha,\beta},\Omega}.$$

D'après le théorème 1.4.12, on a $\mathrm{Cap}_m(K_{\alpha,\beta}, \Omega) = 0$. Or,

$$\mathcal{N} \subset U \cup \bigcup_{(\alpha,\beta)\in A} K_{\alpha,\beta}.$$

Ceci implique que $\mathrm{Cap}_m(\mathcal{N}, \Omega) < \epsilon$, ce qui achève la preuve en faisant $\epsilon \to 0$. $\square$

Définition 1.5.3. Un ensemble $E \subset \mathbb{C}^n$ est dit m-polaire si pour chaque $z \in E$ il existe un voisinage V de z et $v \in \mathcal{SH}(V)$ tels que $E \cap V \subset \{v = -\infty\}$. Si $E \subset \{v = -\infty\}$ avec $v \in \mathcal{SH}(\mathbb{C}^n)$ on dit que E globalement m-polaire.

Proposition 1.5.4. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Alors pour tout ensemble m-polaire $E \subset \Omega$ on a*

$$\int_E (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0.$$

Démonstration. On peut couvrir E par des boules fermées $B_j = B(a_j, R_j)$ telles que $E_j = E \cap B_j \subset \{v_j = -\infty\}$ où $v_j \in \mathcal{SH}(B_j)$. Il suffit de montrer que

$$\int_{E_j} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0, \forall j.$$

Pour cela on fixe $j \in \mathbb{N}$ et prouve que $\int_{A_r} (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$, pour chaque $r < R_j$ où $A_r = v_j^{-1}(-\infty) \cap B(a_j, r)$. Car $B(a_j, r) \Subset \Omega$, on peut supposer que $v_j < 0$. D'après la proposition 1.4.7 il est facile de voir que $u^*_{m,K,B(a_j,r)} \equiv 0$ pour tout compact $K \Subset A_r$. Par conséquent le théorème 1.4.12 nous donne $\mathrm{Cap}_m(K, B(a_j, r)) = 0$. Ceci implique que

$$\int_K (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0,$$

d'où le résultat. $\square$

1.6 La m-capacité extérieure

Dans ce paragraphe on définit la m-capacité extérieure et démontre que les ensembles m-négligeables et m-polaires sont exactement les ensembles à m-capacité extérieure nulle. On établit une relation entre la m-capacité extérieure d'un ensemble avec sa fonction m-extrémale.

Définition 1.6.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $E \subset \Omega$ un sous-ensemble. On définit la m-capacité extérieure de E par rapport à Ω par

$$\mathrm{Cap}^*_m(E, \Omega) = \inf\{\mathrm{Cap}_m(\omega, \Omega) \ / \ E \subset \omega \text{ ouvert dans } \Omega\}.$$

On déduit immédiatement les propriétés de la m-capacité extérieure.

Proposition 1.6.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$.*

(i) Si $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$ alors $Cap^*_m(E_1,\Omega) \leq Cap^*_m(E_2,\Omega)$.

(ii) Si $E \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$ alors $Cap^*_m(E,\Omega_1) \geq Cap^*_m(E,\Omega_2)$.

(iii) Si $E_1, E_2, \ldots$ sont des sous-ensembles de Ω alors

$$Cap^*_m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\Omega\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} Cap^*_m(E_j,\Omega).$$

(iv) Si Ω est m-hyperconvexe, $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ est une suite de compacts de Ω, et $K = \bigcap K_j$, alors

$$\lim_{j\to\infty} Cap_m(K_j,\Omega) = Cap_m(K,\Omega) = Cap^*_m(K,\Omega).$$

Démonstration. Immédiate conséquence de la proposition 1.4.2, du théorème 1.3.10, théorème 1.4.12, et corollaire 1.4.10. □

Théorème 1.6.3. *Soient Ω un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$ et $E \Subset \Omega$. Alors*

$$Cap^*_m(E,\Omega) = \int_\Omega (dd^c u^*_{m,E,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Soit U un voisinage de E qui est relativement compact dans Ω. Fixons $\epsilon > 0$ et observons que, d'après la proposition 1.4.5, les deux fonctions $u^*_{m,E,\Omega}$ et $(1+\epsilon)u^*_{m,U,\Omega}$ sont nulles au bord et Ω est exactement le lieu où l'une est strictement plus grand que l'autre. Le principe de comparaison nous donne

$$\int_\Omega (dd^c u^*_{m,E,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_\Omega (dd^c(1+\epsilon)u^*_{m,U,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m} = (1+\epsilon)^n Cap_m(U,\Omega).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Cap}^*_m(E,\Omega) \geq \int_\Omega (dd^c u^*_{m,E,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Pour l'autre inégalité on fixe une suit croissante de fonctions $v_j \in \mathcal{SH}(\Omega,[-1,0))$ telle que $v_j \leq u_{m,E,\Omega}$ et $\lim_{j\to\infty} v_j = u_{m,E,\Omega}$ presque partout, et $\lim_{z\to w} v_j(z) = 0$ pour tout $w \in \partial\Omega$ et tout $j \in \mathbb{N}$. On définit $U_j = \{(1+1/j)v_j < -1\}$. Alors U_j est un ouvert relativement compact dans Ω et $E \subset U_j$. Or, $(1+1/j)v_j \leq u_{m,U_j,\Omega} \leq u_{m,E,\Omega}$. On a donc $u_{m,U_j,\Omega}$ est croissante et converge vers $u^*_{m,E,\Omega}$ presque partout. Le théorème 1.3.10 nous donne

$$\mathrm{Cap}^*_m(E,\Omega) \leq \lim_{j\to\infty} \mathrm{Cap}_m(U_j,\Omega) = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega (dd^c u_{m,U_j,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega (dd^c u^*_{m,E,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

□

Corollaire 1.6.4. *Soient Ω un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$ et $E \subset \Omega$. Alors $Cap^*_m(E,\Omega) = 0$ si et seulement si $u^*_{m,E,\Omega} \equiv 0$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.4.8 et les propriétés de la m-capacité extérieure (proposition 1.6.2) on peut supposer que E est relativement compact dans Ω. D'après le théorème 1.6.3 on a

$$\mathrm{Cap}^*_m(E,\Omega) = \int_\Omega (dd^c u^*_{m,E,\Omega})^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Par conséquent, une implication est évidente. L'autre implication se déduit du principe de comparaison (corollaire 1.3.15). □

Ensuite on démontre une version du théorème de Josefson.

Théorème 1.6.5. *Si E est m-polaire, il existe $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{C}^n)$ telle que $u \equiv -\infty$ sur E.*

Démonstration. On peut recouvrir E par une suite de boules B_j telle que $u^*_{m,E_j,B_j} \equiv 0$, où $E_j = E \cap B_j$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\varphi^{-1}(n)$ est infini. Choisit une suite $1 < r_1 < r_2 < ...$ telle que $\lim_j r_j = +\infty$ et $B_{\varphi(j)} \subset B(0, r_j - 1)$. D'après la proposition 1.6.2 et le corollaire 1.6.4, on a $u^*_{m,E_{\varphi(j)},B(0,r_j)} \equiv 0, \forall j$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, il existe donc $h_j \in \mathcal{SH}((B(0,r_j), [-1,0))$ telle que $\lim_{z\to y} h_j(z) = 0, y \in \partial B(0,r_j), \forall j$ et

$$h_j \equiv -1 \text{ sur } E_{\varphi(j)} \text{ et } \int_{B(0,r_j)} |h_j| d\lambda < 2^{-j}.$$

La fonction

$$p_j(z) = \begin{cases} \max\{h_j(z), \|z\| - r_j\} \text{ dans } B(0,r_j) \\ \|z\| - r_j \quad \text{dans } \mathbb{C}^n \setminus B(0,r_j) \end{cases}$$

est m-sousharmonique sur $\mathbb{C}^n$ et n'est pas supérieure à -1 sur $E_{\varphi(j)}$. On considère

$$p(z) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(z).$$

Comme la séries converge dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}^n)$, p n'est pas identiquement $-\infty$. Or, p est m-sousharmonique car la suite de sommes partielles est décroissante quand l'indice est suffisamment grande. De plus, $p \equiv -\infty$ sur E, ce qui achève la preuve. □

Théorème 1.6.6. *Soient Ω un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$ et $E \subset \Omega$. Alors E est m-polaire si et seulement si $Cap^*_m(E,\Omega) = 0$.*

Démonstration. Si $E \subset \Omega$ est m-polaire, le théorème de Josefson nous aide à trouver $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{C}^n)$ telle que $u < 0$ dans Ω et $u = -\infty$ sur E. Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 1.4.7 et le corollaire 1.6.4 pour voir que $\text{Cap}^*_m(E,\Omega) = 0$. L'autre implication se fait de la même façon. □

Théorème 1.6.7. *Tout ensemble m-négligeable est m-polaire.*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 1.5.2 on peut supposer que Ω est une boule. Pour chaque $\epsilon > 0$ on peut trouver $G \subset \Omega$ avec $\text{Cap}_m(G,\Omega) < \epsilon$ et une suite de compacts K_j avec $\text{Cap}_m(K_j,\Omega) = 0$, telles que notre ensemble négligeable $\mathcal{N}$ est contenu dans $G \cup K_1 \cup K_2 \cup ...$ D'après la proposition 1.6.2 on obtient

$$\text{Cap}^*_m(\mathcal{N},\Omega) \leq \text{Cap}^*_m(G,\Omega) + \text{Cap}^{`}_m(K_1,\Omega) + ... < \epsilon.$$

Maintenant il suffit d'appliquer le théorème 1.6.6. □

Corollaire 1.6.8. *Une union dénombrable d'ensembles m-polaires est m-polaire.*

Démonstration. Soient E_j une suite d'ensembles m-polaires et E leur union. Soit $a \in E$ et $B = B(a,1)$, $B_j = E_j \cap B$. D'après la proposition 1.4.7 on a $u^*_{m,B_j,B} \equiv 0$. Donc, d'après le corollaire 1.4.8, on a $u^*_{m,E\cap B,B} \equiv 0$. Encore, la proposition 1.4.7 nous dit que E est m-polaire. □

Corollaire 1.6.9. *Soient Ω un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$ et $E_1 \subset E_2 \subset ...$ sont des sous-ensembles de Ω. Alors $u^*_{m,E,\Omega} = \lim_{j\to\infty} u^*_{m,E_j,\Omega}$, où $E = \bigcup E_j$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.6.7, $u^*_{m,E_j,\Omega} = -1$ sur E_j, sauf dans un sous-ensemble m-polaire de E_j. Par conséquent on a $u = \lim_{j\to\infty} u^*_{m,E_j,\Omega} = -1$ sur $E \setminus F$, où $F \subset E$ est m-polaire. D'après le théorème de Josefson il existe $v \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $v < 0$ et $v \equiv -\infty$ sur F. Pour chaque $\epsilon > 0$ on a $u + \epsilon v \leq u_{m,E,\Omega}$, et puis

$$u = \big(\sup_{\epsilon>0}(u + \epsilon v)\big)^* \leq u^*_{m,E,\Omega} \leq u.$$

□

Corollaire 1.6.10. *Un ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est m-négligeable si et seulement si il est m-polaire.*

Démonstration. Suppose que $E \subset \mathbb{C}^n$ est m-polaire. D'après le théorème de Josefson, il existe une fonction m-sousharmonique u dans $\mathbb{C}^n$ telle que $u \equiv -\infty$ sur E. En posant $U = \{u < 0\}$, la fonction

$$v_\epsilon = \begin{cases} \epsilon u \text{ dans } U \\ u \text{ dans } \mathbb{C}^n \setminus U \end{cases}$$

est m-sousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ pour chaque $\epsilon \in (0,1)$. Or, $\{v_\epsilon = -\infty\} = \{u = -\infty\}$. Donc, si on pose $v = \sup_{\epsilon > 0} v_\epsilon$, on a $v^* = \max\{u, 0\}$ et $E \subset \{v < v^*\}$. □

1.7 Les classes d'énergie finie de type Cegrell

Cegrell [Ceg98] a introduit les classes $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ pour les fonctions plurisousharmoniques. Dans ce paragraphe on étudie de telles classes pour les fonctions m-sousharmoniques sur un domaine m-hyperconvexe. On montre que l'opérateur hessien complexe est bien défini et continue pour les suites raisonnables. On établit la formule d'intégration par parties et le principe de comparaison.

Dans la suite on suppose toujours que Ω est un domaine m-hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$ et β est la forme de Kähler standard sur $\mathbb{C}^n$.

1.7.1 Définitions et propriétés

Dans ce paragraphe on introduit les classes de Cegrell et on démontre quelques propriétés basiques et importantes de ces classes. Une chose très importante dans la théorie du potentiel est de savoir régulariser une fonction singulière par une suite de fonctions lisses. On peut le faire localement en utilisant la convolution avec un noyau lisse, mais globalement ce n'est pas clair. Le théorème suivant nous expliquera comment régulariser globalement sur un domaine m-hyperconvexe. On note $\mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ la classe de fonctions négatives dans $\mathcal{SH}_m(\Omega)$.

Théorème 1.7.1. *Pour chaque $\varphi \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ il existe une suite (φ_j) de fonctions m-sousharmoniques vérifiant les conditions suivantes :*
(i) φ_j est continue sur $\bar{\Omega}$ et $\varphi_j \equiv 0$ sur $\partial\Omega$;
(ii) chaque $H_m(\varphi_j)$ est de masse finie, i.e. $\int_\Omega H_m(\varphi_j) < +\infty$;
(iii) $\varphi_j \downarrow \varphi$ sur Ω.

Démonstration. Si B est une boule dans Ω d'après la proposition 1.4.9, la fonction m-extrémale $u := u_{m,B,\Omega}$ est continue sur $\bar{\Omega}$ et supp$H_m(u) \Subset \Omega$. On imite la preuve de [Ceg04, Theorem 2.1].

On prend une suite décroissante (r_j) telle que

$$0 < r_j < dist\Big(\Big\{u(z) < -\frac{1}{2j^2}\Big\}, \partial\Omega\Big).$$

Soit ψ_j la suite régularisante de φ par la convolution avec un noyau lisse, elle est définie sur

$$\Omega_j := \{z \in \Omega : dist(z, \partial\Omega) > 1/j\}.$$

On pose

$$v_m(z) = \begin{cases} \max\big(\psi_{r_m}(z) - \dfrac{1}{m}, m.u(z)\big) & \text{si } \ z \in \Omega_{r_m} \\ m.u(z) \ \text{ si } \ z \in \Omega \setminus \Omega_{r_m}, \end{cases}$$

et

$$\varphi_j := \sup_{m \geq j} v_m.$$

On vérifie sans difficulté que pour chaque m, $v_m \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $v_m \equiv 0$ sur $\partial\Omega$. On en déduit que φ_j est semi-continue inférieurement pour tout j. Par ailleurs on a

$$\varphi_j^k := \max\{v_j, ..., v_{k-1}, v_k + \frac{1}{k}\}, k > j.$$

Ceci entraîne que $\varphi_j^k \downarrow \varphi_j$ quand $k \to +\infty$ et chaque φ_j^k est continue, d'où le résultat. $\square$

Définition 1.7.2. On note $\mathcal{E}_m^0$ la classe de fonctions bornées dans $\mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ telles que $\lim_{z \to \partial\Omega} \varphi(z) = 0$ et $\int_\Omega H_m(\varphi) < +\infty$.

Pour chaque $p > 0$ on note $\mathcal{E}_m^p$ la classe de fonctions $\varphi \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telles qu'il existe une suite décroissante $(\varphi_j) \subset \mathcal{E}_m^0$ vérifiant

(i) $\lim_j \varphi_j = \varphi$,

(ii) $\sup_j \int_\Omega (-\varphi_j)^p H_m(\varphi_j) < +\infty$.

Si l'on demande de plus que $\sup_j \int_\Omega H_m(\varphi_j) < +\infty$ on a, par définition, $\varphi \in \mathcal{F}_m^p(\Omega)$.

Définition 1.7.3. Une fonction $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ appartient à $\mathcal{E}_m(\Omega)$ si pour chaque $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de z_0 et une suite décroissante $(h_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ tels que $h_j \downarrow u$ dans U et

$$\sup_j \int_\Omega H_m(h_j) < +\infty.$$

On note $\mathcal{F}_m(\Omega)$ la classe de fonctions $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ telle qu'il existe une suite $(u_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroît vers u dans Ω et

$$\sup_j \int_\Omega H_m(u_j) < +\infty.$$

Remarque 1.7.4. $\mathcal{SH}_m^-(\Omega) \cap L_{loc}^\infty \subset \mathcal{E}_m(\Omega)$. En effet, soient $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ et $z_0 \in B(z_0, r) \Subset \Omega$. Considérons la fonction $h := h_{m,B,\Omega}$. On sait que $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $h \equiv -1$ dans B. Pour chaque $A > 0$ assez grand on a $\max(u, Ah) \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $\max(u, Ah) = u$ dans B.

Théorème 1.7.5. *La classe $\mathcal{E}_m(\Omega)$ est la plus grande sous-classe de $\mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) si $u \in \mathcal{E}_m(\Omega), v \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ alors $\max(u, v) \in \mathcal{E}_m(\Omega)$.

(ii) si $u \in \mathcal{E}_m(\Omega), \varphi_j \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega) \cap L_{loc}^\infty, \varphi_j \downarrow u$, alors $H_m(\varphi_j)$ est faiblement convergente.

Démonstration. Que $\mathcal{E}_m(\Omega)$ vérifie la condition (i) est assez évident. Suppose que $u \in \mathcal{E}_m(\Omega), \varphi_j \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega) \cap L_{loc}^\infty, \varphi_j \downarrow u$. On fixe χ une fonction test à support compact $K \Subset \Omega$, et $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Pour chaque j on peut trouver m_j tel que $\varphi_j \geq m_j\varphi$ dans un voisinage de K. On a donc $g_j := \max(\varphi_j, m_j\varphi) \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et on déduit de $g_j \downarrow u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$, que $H_m(g_j)$ est faiblement convergente. On observe également que $g_j = \varphi_j$ près de K.

Maintenant soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ vérifiant (i) et (ii). Prenons $u \in \mathcal{K}$. Il faut prouver que $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$. Soit u_j une suite dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ telle que $u_j \downarrow u$ sur Ω. Considérons un compact $B \Subset \Omega$ et posons pour chaque j

$$h_j := \sup\{v \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega) \ / \ v \leq u_j \text{ sur } \ B\}.$$

Alors, $h_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $\operatorname{supp} H_m(h_j) \subset \bar{B}$, pour tout j. Par ailleurs, $h_j \downarrow u$ sur B et $\sup_j \int_\Omega H_m(h_j) < +\infty$, car $H_m(h_j)$ est faiblement convergente d'après (ii). $\square$

Remarque 1.7.6. Le théorème 1.7.5 nous dit que chaque $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ est localement dans $\mathcal{F}_m(\Omega)$, i.e, pour chaque $K \Subset \Omega$ il existe $\tilde{u} \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ telle que $\tilde{u} = u$ sur K.

Définition 1.7.7. On définit la p-énergie $(p > 0)$ de $\varphi \in \mathcal{E}_0$ par

$$e_p(\varphi) := \int_\Omega (-\varphi)^p H_m(\varphi).$$

On généralise l'inégalité de Hölder dans le lemme suivant. Si $m = n$ c'est un résultat de Persson [Per99]. On emprunte la même idée.

Lemme 1.7.8. *Soient $u, v_1, ..., v_m \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $p \geq 1$. On a*

$$\int_\Omega (-u)^p dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_m \wedge \beta^{n-m} \leq D_{j,p}(e_p(u))^{\frac{p}{m+p}} e_p(v_1)^{\frac{1}{m+p}} ... e_p(v_m)^{\frac{1}{m+p}}, \tag{1.7.1}$$

où $D_{j,1} = 1$ et pour chaque $p > 1$, $D_{j,p} := p^{p\alpha(p,m)/(p-1)}$, et

$$\alpha(p, m) = (p + 2)\Big(\frac{p + 1}{p}\Big)^{m-2} - p - 1.$$

Démonstration. Posons

$$F(u, v_1, ..., v_m) = \int_\Omega (-u)^p dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_m \wedge \beta^{n-m}, \ u, v_1, ..., v_m \in \mathcal{E}_m^0(\Omega).$$

Grâce au [Per99, Theorem 4.1] il suffit de montrer que

$$F(u, v, v_1, ..., v_{m-1}) \leq a(p)F(u, u, v_1, ..., v_{m-1})^{\frac{p}{p+1}} F(v, v, v_1, ..., v_{m-1})^{\frac{1}{p+1}}, \tag{1.7.2}$$

où $a(p) = 1$ si $p = 1$ et $a(p) = p^{\frac{p}{p-1}}$ si $p > 1$. On note $T = dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$. Quand $p = 1$, (1.7.2) devient

$$\int_\Omega (-u)dd^c v \wedge T \leq \Big(\int_\Omega (-u)dd^c u \wedge T\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega (-v)dd^c v \wedge T\Big)^{\frac{1}{2}},$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quand $p > 1$, On répète la preuve de la proposition 1.2.2 pour obtenir

$$\int_\Omega (-u)^p dd^c v \wedge T \leq p \int_\Omega (-u)^{p-1}(-v)dd^c u \wedge T.$$

Par l'inégalité de Hölder on en déduit que

$$\int_\Omega (-u)^p dd^c v \wedge T \leq p\Big(\int_\Omega (-u)^p dd^c u \wedge T\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_\Omega (-v)^p dd^c u \wedge T\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7.3}$$

En échangeant u et v on obtient

$$\int_\Omega (-v)^p dd^c u \wedge T \leq p\Big(\int_\Omega (-u)^p dd^c v \wedge T\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega (-v)^p dd^c v \wedge T\Big)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.7.4}$$

En combinant (1.7.4) et (1.7.3) on obtient le résultat.

□

Grâce au lemme 1.7.8 on peut majorer $\int_\Omega (u_0)^p dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}$ en termes des $e_p(u_j), j = 0, ..., m$ si $p \geq 1$. Pour établir des estimées similaires quand $p \in (0, 1)$ on réfère à [GZ07].

Lemme 1.7.9. *Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $0 < p < 1$. Si T est un courant m-positif fermé de type $T = dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{m-k} \wedge \beta^{n-m}$, où $u_j \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{loc}$. Alors*

$$\int_\Omega (-u)^p (dd^c v)^k \wedge T \leq 2 \int_\Omega (-u)^p (dd^c u)^k \wedge T + 2 \int_\Omega (-v)^p (dd^c v)^k \wedge T.$$

Démonstration. On imite la preuve dans [GZ07, Proposition 2.5]. Posons $\chi(t) = -(-t)^p : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ et observons que $\chi'(2t) \leq \chi'(t),\ \forall t < 0$, donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\chi) \circ u\, (dd^c v)^k \wedge T &= \int_{-\infty}^0 \chi'(t)(dd^c v)^k \wedge T(u < t)dt \\ &\leq 2\int_{-\infty}^0 \chi'(t)(dd^c v)^k \wedge T(u < 2t)dt.\end{aligned}$$

Comme $(u < 2t) \subset (u < v + t) \cup (v < t)$ on a

$$\int_\Omega (-\chi) \circ u\, (dd^c v)^k \wedge T \leq 2\int_{-\infty}^0 \chi'(t)(dd^c v)^k \wedge T(u < v + t)dt + 2\int_\Omega (-\chi) \circ v\, (dd^c v)^k \wedge T.$$

Le principe de comparaison nous donne

$$(dd^c v)^k \wedge T(u < v + t) \leq (dd^c u)^k \wedge T(u < v + t).$$

Maintenant il suffit de noter que $(u < v + t) \subset (u < t)$. □

Proposition 1.7.10. *Soit* $0 < p < 1$. *Il existe* $C_p > 0$ *tel que*

$$0 \leq \int_\Omega (-\varphi_0)^p dd^c\varphi_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\varphi_m \wedge \beta^{n-m} \leq C_p \max_{0 \leq j \leq m} e_p(\varphi_j),$$

pour toutes $0 \geq \varphi_0, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$.

Démonstration. En appliquant le lemme 1.7.9 avec $u = \varphi_0$, $v = \varphi_1$ et $T = dd^c\varphi_2 \wedge \cdots \wedge dd^c\varphi_m \wedge \beta^{n-m}$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\varphi_0)^p dd^c\varphi_1 \wedge T &\leq 2\int_\Omega (-\varphi_0)^p dd^c\varphi_0 \wedge T \\ &+ 2\int_\Omega (-\varphi_1)^p\, dd^c\varphi_1 \wedge T.\end{aligned} \tag{1.7.5}$$

Dans la suite on peut supposer que $\varphi_0 = \varphi_1$. Posons $u = \epsilon \sum_{i=1}^m \varphi_i$, où $\epsilon > 0$ est assez petit. Observons que

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \geq \epsilon^m dd^c\varphi_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\varphi_m \wedge \beta^{n-m}. \tag{1.7.6}$$

Il suffit donc de contrôler $\int_\Omega (-\varphi_i)^p\, H_m(u),\ 1 \leq i \leq m$ pour conclure. En utilisant encore le lemme 1.7.9 on obtient

$$\int_\Omega (-\varphi_i)^p\, H_m(u) \leq 2e_p(\varphi_i) + 2e_p(u),$$

où $e_p(u) := \int_\Omega (-u)^p\, H_m(u)$.

Par sous-additivité et homogénéité de $t \mapsto t^p$, on a

$$e_p(u) \leq \epsilon^p \sum_{j=1}^m \int_\Omega (-\varphi_j)^p H_m(u),$$

donc

$$\sum_{i=1}^m \int_\Omega (-\varphi_i)^p\, H_m(u) \leq \frac{2}{1 - 2m\epsilon^p} \sum_{i=1}^m e_p(\varphi_i). \tag{1.7.7}$$

D'après (1.7.5), (1.7.6) et (1.7.7) on obtient

$$\int_\Omega (-\varphi_0)^p dd^c\varphi_1 \wedge \cdots \wedge dd^c\varphi_m \wedge \beta^{n-m} \leq \frac{4m}{\epsilon^m[1 - 2m\epsilon^p]} \max_{1 \leq i \leq m} e_\chi(\varphi_i),$$

d'où le résultat. □

Du lemme 1.7.8 et de la proposition 1.7.10 on obtient facilement que :

Corollaire 1.7.11. *Soient* (u_j) *une suite dans* $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ *et* $p > 0$. *Si* $\sup_j e_p(u_j) < +\infty$, *alors*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} u_j \textit{ appartient à } \mathcal{E}_m^p(\Omega).$$

On est sur le point de montrer la convexité des classes de Cegrell.

Théorème 1.7.12. *On note par* $\mathcal{E}$ *l'une des classes* $\mathcal{E}_m^0(\Omega), \mathcal{E}_m(\Omega), \mathcal{F}_m(\Omega), \mathcal{E}_m^p(\Omega), \mathcal{F}_m^p(\Omega), p > 1$. *Elles sont convexes et si* $v \in \mathcal{E}$, $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$, $u \geq v$, *alors on a* $u \in \mathcal{E}$.

Démonstration. (i) **La classe** $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. On affirme que

$$\int_{(u=tv)} H_m(u+v) = 0,$$

pour presque tous $t > 0$. En effet, la fonction $f(t) = \mu(u < tv), t > 0$ est décroissante et continue à droite car $\mu = H_m(u+v)$ est une mesure de Borel. Le fait que $f(t) < +\infty, \forall t > 0$ résulte du principe de comparaison comme suit :

$$\int_{u<tv} H_m(u+v) = \int_{\frac{1+t}{t}u<u+v} H_m(u+v) \leq \int_{\frac{1+t}{t}u<u+v} \frac{(1+t)^m}{t^m} H_m(u) < +\infty.$$

Car $\mu(u < tv) < +\infty, \forall t > 0$, on a $\lim_{t\to t_0^-} f(t) = \mu(u \leq t_0 v)$. Par conséquent, l'ensemble $I_\mu := \{t > 0 \ / \ \mu(u = tv) > 0\}$ coïncide avec le lieu des discontinuités de f, qui est une fonction monotone. Cela veut implique que I_μ est au plus dénombrable, ce qui prouve l'affirmation.

On fixe un tel $t > 0$ et applique encore le principe de comparaison pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega H_m(u+v) &= \int_{u-tv<0} H_m(u+v) + \int_{u-tv>0} H_m(u+v) \\
&= \int_{\frac{1+t}{t}u<u+v} H_m(u+v) + \int_{(1+t)v<u+v} H_m(u+v) \\
&\leq \frac{(1+t)^m}{t^m} \int_{\frac{1+t}{t}u<u+v} H_m(u) + (1+t)^m \int_{(1+t)v<u+v} H_m(v) \\
&\leq \frac{(1+t)^m}{t^m} \int_\Omega H_m(u) + (1+t)^m \int_\Omega H_m(v) < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, $u + v \in \mathcal{E}_0$, d'où $\mathcal{E}_0$ est convexe.

Soient maintenant $u \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $v \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ et on pose $w = \max(u, v)$. Il faut montrer que $H_m(w)$ est de masse finie. On fixe $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que $-1 \leq h \leq 0$. la formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_\Omega h H_m(w) \geq \int_\Omega h H_m(u).$$

En faisant $h \downarrow -1$ on voit que $\int_\Omega H_m(w) \leq \int_\Omega H_m(u)$. La même méthode peut être employée pour les classes $\mathcal{E}_m(\Omega), \mathcal{F}_m(\Omega)$.

La classe $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$. Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ et u_j, v_j deux suites dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroissent vers u, v et vérifient

$$\sup_j \max\Big(\int_\Omega (-u_j)^p H_m(u_j), \int_\Omega (-v_j)^p H_m(v_j) \Big) < +\infty.$$

Il s'agit de montrer que

$$\sup_j \int_\Omega (-u_j - v_j)^p H_m(u_j + v_j) < +\infty.$$

D'après l'inégalité de Hölder, il reste à contrôler les termes

$$\int_\Omega (-u_j)^p (dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{m-k} \wedge \beta^{n-m} \text{ et } \int_\Omega (-v_j)^p (dd^c u_j)^k \wedge (dd^c v_j)^{m-k} \wedge \beta^{n-m},$$

ce qui résulte du lemme 1.7.8 et de la proposition 1.7.10.

Maintenant, soient $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$, $v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ et supposons que $u \geq v$. Prenons une suite $(v_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et une suite $(u_j) \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ telles que $v_j \downarrow v$, $u_j \downarrow u$, $u_j \geq v_j$ et

$$\sup_j e_p(v_j) < +\infty.$$

Si $p \geq 1$, le lemme 1.7.8 nous donne

$$e_p(u_j) \leq \int_\Omega (-v_j)^p H_m(u_j) \leq C.e_p(v_j)^{\frac{p}{m+p}}.e_p(u_j)^{\frac{m}{m+p}}.$$

On en déduit que $\sup_j e_p(u_j) < +\infty$, donc $u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$.

Si $0 < p < 1$, pour chaque j, posons $h_j = -(-v_j)^p$. Alors h_j est m-sh bornée et nulle au bord. D'après la formule d'intégration par parties on a

$$e_p(u_j) \leq \int_\Omega (-h_j) H_m(u_j) \leq \int_\Omega (-h_j) H_m(v_j) = e_p(v_j).$$

En combinant les deux étapes précédentes on obtient le résultat pour $\mathcal{F}_m^p(\Omega)$. □

1.7.2 Définition de l'opérateur hessien complexe

Dans ce paragraphe on montre que l'opérateur Hessien $H_m(u)$ est bien défini pour toute $u \in \mathcal{E}_m(\Omega) \cup_{p>0} \mathcal{E}_m^p(\Omega)$. On montre tout d'abord que les fonctions continues dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ peuvent être considérer comme les fonctions tests.

Lemme 1.7.13. $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega) - \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$.

Démonstration. On fixe $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $0 > \psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. On peut choisir $A > 0$ assez grand de sorte que $\psi + A|z|^2$ est plurisousharmonique. On prend $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a < \inf \chi < \sup_\Omega (|\chi| + A|z|^2) < b.$$

Maintenant on considère

$$\varphi_1 = \max(\chi + A|z|^2 - b, B\psi); \quad \varphi_2 = \max(A|z|^2 - b, B\psi),$$

où B est suffisamment grand tel que $B\psi < a - b$ dans $\text{supp}(\chi)$. On voit sans difficulté que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $\chi = \varphi_1 - \varphi_2$. □

Théorème 1.7.14. *Soient $u^p \in \mathcal{E}_m(\Omega), p = 1, ..., m$ et $(g_j^p)_j \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telles que $g_j^p \downarrow u^p, \forall p$. Alors la suite de mesures*

$$dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$$

converge faiblement vers une mesure de Radon positive qui ne dépend pas du choix des suites (g_j^p). On définit donc $dd^c u^1 \wedge ... \wedge dd^c u^m \wedge \beta^{n-m}$ comme cette limite faible.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\sup_j \int_\Omega H_m(g_j^p) < +\infty$. Alors pour toute $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$$

est décroissante. Or,

$$\int_\Omega h H_m(g_j^p) \geq (\inf_\Omega h) \sup_j \int_\Omega H_m(g_j^p) > -\infty.$$

On voit donc que $\lim_j \int_\Omega h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$ existe pour toute $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Par conséquent $dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$ est faiblement convergente. Suppose maintenant que $(v_j^p)_j$ est une autre suite qui décroît vers $u^p, p = 1, ..., m$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega h dd^c v_j^1 \wedge dd^c v_j^2 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_\Omega v_j^1 dd^c h \wedge dd^c v_j^2 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\geq \int_\Omega u^1 dd^c h \wedge dd^c v_j^2 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \lim_{s_1 \to +\infty} \int_\Omega g_{s_1}^1 dd^c h \wedge dd^c v_j^2 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \lim_{s_1 \to +\infty} \int_\Omega v_j^2 dd^c h \wedge dd^c g_{s_1}^1 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m} \geq ... \\
&\geq \lim_{s_1 \to +\infty} \lim_{s_2 \to +\infty} ... \lim_{s_m \to +\infty} \int_\Omega h_j dd^c g_{s_1}^1 \wedge dd^c g_{s_2}^2 \wedge ... \wedge dd^c g_{s_m}^m \wedge \beta^{n-m} \\
&= \lim_{s \to +\infty} \int_\Omega h dd^c g_s^1 \wedge dd^c g_s^2 \wedge ... \wedge dd^c g_m^s \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_j \int_\Omega h dd^c v_j^1 \wedge dd^c v_j^2 \wedge ... \wedge dd^c v_j^m \wedge \beta^{n-m}$ existe et n'est pas plus petite que

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}.$$

On conclut (en échangeant le rôle de g_j^p et v_j^p) que les deux limites sont égales.

Reste à enlever l'hypothèse $\sup_j \int_\Omega H_m(g_j^p) < +\infty$. Sans perte de généralité on peut supposer que g_j^p sont continues. Soit K un compact de Ω. On couvre K par W_q, $q = 1, ..., N$ et fixe $(h_j^{pq})_j, p = 1, .., m; q = 1, .., N$ des suites qui convergent vers u^p dans W_q comme dans la définition de $\mathcal{E}_m(\Omega)$. On pose $w_j^p := \sum_1^N h_j^{pq}$. On peut réarranger la suite h_j^{pq} telle que $w_j^p \leq g_j^p$ sur $\bigcup_q W_q$. Évidemment, on a $w_j^p \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $\sup_j \int_\Omega H_m(w_j^p) < +\infty$. Si on définit $v_j^p = \max(g_j^p, w_j^p)$, alors $\sup_j \int_\Omega H_m(v_j^p) < +\infty$ et $v_j^p = g_j^p$ près de K. Ceci achève la preuve. □

Corollaire 1.7.15. *Soient $u_1, ..., u_m \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ et $u_1^j, ..., u_m^j$ des suites de fonctions dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ qui décroissent vers $u_1, ..., u_m$ respectivement telles que*

$$\sup_{j,p} \int_\Omega H_m(u_j^p) < +\infty.$$

Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ on a

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega \varphi dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega \varphi dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Il est clair que

$$\sup_j \int_\Omega dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} < +\infty. \tag{1.7.8}$$

On fixe $\epsilon > 0$ assez petit et on considère $\varphi_\epsilon = \max(\varphi, -\epsilon)$. La fonction $\varphi - \varphi_\epsilon$ est continue à support compact dans Ω. D'après le théorème 1.7.14 on a

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (\varphi - \varphi_\epsilon) dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega (\varphi - \varphi_\epsilon) dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}.$$

En notant que $|\varphi_\epsilon| \leq \epsilon$ et en utilisant (1.7.8), on obtient le résultat. □

Des raisonnements similaires fonctionnent pour les classes $\mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$.

Théorème 1.7.16. *Soient $u^1, ..., u^m \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$, $p > 0$ et $(g_j^i)_j \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telles que $g_j^i \downarrow u^i, \forall i = 1, ..., m$ et*

$$\sup_{i,j} e_p(g_j^i) < +\infty.$$

Alors la suite de mesures $dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$ converge faiblement vers une mesure de Radon positive qui ne dépend pas du choix des suites (g_j^i). On définit $dd^c u^1 \wedge ... \wedge dd^c u^m \wedge \beta^{n-m}$ comme cette limite faible.

Démonstration. On fixe $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$$

est une suite décroissante. On déduit du lemme 1.7.8 et de la proposition 1.7.10 que

$$\sup_j \int_\Omega (-h) dd^c g_j^1 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m} < +\infty.$$

Donc, $\lim_j \int_\Omega h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$ existe pour toute $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Ceci implique la convergence faible de la suite

$$dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge ... \wedge dd^c g_j^m \wedge \beta^{n-m}$$

en vue du lemme 1.7.13. Pour démontrer le reste il suffit de répéter la preuve du théorème 1.7.14. □

Corollaire 1.7.17. *Soient $u_1, ..., u_m \in \mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$ et $u_1^j, ..., u_m^j$ des suites de fonctions dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroissent vers $u_1, ..., u_m$ respectivement telles que*

$$\sup_{j,k} \int_\Omega (-u_k^j)^p H_m(u_k^j) < +\infty.$$

Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ on a

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \varphi dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega \varphi dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. Comme dans la preuve du corollaire 1.7.15, il suffit de montrer que

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-\varphi_\epsilon) dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m} = 0,$$

où $\varphi_\epsilon = \max(\varphi, -\epsilon)$. Le terme dans la limite de gauche est dominé par

$$\epsilon^{1-p}\int_\Omega (-\varphi_\epsilon)^p dd^c u_1^j \wedge ... \wedge dd^c u_m^j \wedge \beta^{n-m}.$$

On sait que $\varphi_\epsilon = \varphi$ près du bord de Ω. Donc

$$e_p(\varphi_\epsilon) = \int_\Omega (-\varphi_\epsilon)^p H_m(\varphi_\epsilon) \leq \epsilon^p \int_\Omega H_m(\varphi).$$

Maintenant, en appliquant le lemme 1.7.8 et la proposition 1.7.10, on obtient le résultat. □

1.7.3 Intégration par parties

On déduit du théorème 1.7.14 et du corollaire 1.7.15 que la formule d'intégration par parties est valide dans $\mathcal{F}_m(\Omega)$:

Théorème 1.7.18.

$$\int_\Omega u dd^c v \wedge T = \int_\Omega v dd^c u \wedge T,$$

où $u, v, \varphi_1, ..., \varphi_p \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ *et* $T = dd^c\varphi_1 \wedge ... \wedge dd^c\varphi_p \wedge \beta^{n-m-1}$.

Démonstration. Soient $u_j, v_j, \varphi_1^j, .., \varphi_{m-1}^j$ des suites décroissantes dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ qui décroît vers $u, v, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1}$ respectivement et telles que les masse totales sont uniformément bornées :

$$\sup_j \int_\Omega dd^c v_j \wedge T_j < +\infty, \quad \sup_j \int_\Omega dd^c u_j \wedge T_j < +\infty,$$

où $T_j = dd^c\varphi_1^j \wedge ... \wedge dd^c\varphi_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}$. Le théorème 1.7.14 nous dit que $dd^c u_j \wedge T_j \rightharpoonup dd^c u \wedge T$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $j > k$ on a

$$\int_\Omega v_k dd^c u_k \wedge T_k \geq \int_\Omega v_k dd^c u_j \wedge T_j \geq \int_\Omega v_j dd^c u_j \wedge T_j.$$

On en déduit que la suite de nombres réelles $\int_\Omega v_j dd^c u_j \wedge T$ est décroissante donc converge vers $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. En faisant $j \to +\infty$ on obtient

$$\int_\Omega v_k dd^c u \wedge T \geq a,$$

d'où $\int_\Omega v dd^c u \wedge T \geq a$. Ainsi, pour chaque k fixé on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega v dd^c u \wedge T &\leq \int_\Omega v_k dd^c u \wedge T = \lim_{j\to+\infty}\int_\Omega v_k dd^c u_j \wedge T_j \\ &\leq \int_\Omega v_k dd^c u_k \wedge T_k.\end{aligned}$$

Ceci implique que $\int_\Omega v dd^c u \wedge T = a$, d'où le résultat. □

On obtient le même résultat pour $\mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$ en faisant les mêmes raisonnements.

Théorème 1.7.19. *L'intégration par parties est permise dans* $\mathcal{E}_p, p > 0$. *Plus précisément, soient* $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ *et* T *un courant m-positif fermé de type* $T = dd^c\varphi_1 \wedge ...dd^c\varphi_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$, *où* $\varphi_j \in \mathcal{E}_m^p(\Omega), \forall j$. *Alors*

$$\int_\Omega u dd^c v \wedge T = \int_\Omega v dd^c u \wedge T.$$

1.7.4 Principe de comparaison

On montrera dans ce paragraphe que le principe de comparaison est valide dans $\mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$.

Lemme 1.7.20. *Soient E un ouvert de Ω et $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega),\ p \geq 1$. Alors*

$$\int_E H_m(\varphi) \leq Cap_m(E)^{\frac{p}{p+m}} e_p(\varphi)^{\frac{m}{p+m}}.$$

Démonstration. On peut supposer que E est relativement compact dans Ω. On note $u = u_{m,E,\Omega}$ la fonction m-extrémale de E dans Ω. Alors $u \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $u = -1$ dans E. D'après le lemme 1.7.8 on a

$$\begin{aligned} \int_E H_m(\varphi) &\leq \int_\Omega (-u)^p H_m(\varphi) \leq e_p(u)^{\frac{p}{m+p}} e_p(\varphi)^{\frac{m}{m+p}} \\ &\leq \Big(\int_\Omega H_m(u)\Big)^{\frac{p}{m+p}} e_p(\varphi)^{\frac{m}{p+m}} = \mathrm{Cap}_m(E)^{\frac{p}{p+m}} e_p(\varphi)^{\frac{m}{p+m}}. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.7.21. *Soient $E \subset \Omega$ un ouvert et $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega),\ 0 < p < 1$. Alors pour chaque $\epsilon > 0$ assez petit on a*

$$\int_E H_m(\varphi) \leq 2(Cap_m(E))^{1-m\epsilon} + 2Cap_m(E)^{p\epsilon} e_p(\varphi).$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $E \Subset \Omega$. Soit u la fonction m-extrémale de E par rapport à Ω. On pose $a = \mathrm{Cap}_m(E) = \int_\Omega H_m(u)$. Si $a = 0$, on a rien à démontrer. Donc, on suppose que $a > 0$. En applicant le lemme 1.7.9 on obtient

$$\begin{aligned} \int_E H_m(\varphi) &\leq a^{p\epsilon} \int_\Omega (-u/a^\epsilon)^p H_m(\varphi) \\ &\leq 2a^{p\epsilon} e_p(u/a^\epsilon) + 2a^{p\epsilon} e_p(\varphi) \\ &\leq 2a^{1-m\epsilon} + 2a^{p\epsilon} e_p(\varphi). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.7.22. *Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega),\ p > 0$ et posons $A := \{u > v\}$. Alors*

$$1\!\!1_A H_m(u) = 1\!\!1_A H_m(\max(u, v)).$$

Démonstration. Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroît vers u comme dans la définition de $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$. On déduit du théorème 1.3.12 que

$$1\!\!1_{A_j} H_m(u_j) = 1\!\!1_{A_j} H_m(\max(u_j, v)), \tag{1.7.9}$$

où $A_j := \{u_j > v\}$. Considérons $\psi_j := \max(u_j - v, 0)$. Alors $\psi_j \downarrow \psi := \max(u - v, 0)$, et toutes les fonctions sont quasi-continues.

Fixons un $\delta > 0$ et posons $g_j := \frac{\psi_j}{\psi_j + \delta},\ g = \frac{\psi}{\psi + \delta}$. En multipliant (1.7.9) avec g_j on obtient

$$g_j H_m(u_j) = g_j H_m(\max(u_j, v)). \tag{1.7.10}$$

Soient $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ une fonction test et $\epsilon > 0$. Il existe un ouvert $U \subset \Omega$ tel que $\mathrm{Cap}_m(U) < \epsilon$, et il existe φ_j, φ des fonctions continues dans Ω qui coïncident avec ψ_j, ψ respectivement sur $K := \Omega \setminus U$. La convergence monotone $\psi_j \downarrow \psi$ entraîne que φ_j converge uniformément vers φ sur $K \cap \mathrm{Supp}\chi$, qui, à son tour, implique la convergence uniforme de $h_j = \frac{\varphi_j}{\varphi_j + \delta}$ sur $K \cap \mathrm{Supp}\chi$ vers $h = \frac{\varphi}{\varphi + \delta}$.

Dans la suite, on note C une constante positive qui ne dépend pas de j,ϵ. Puisque g_j, h_j sont uniformément bornées, il résulte du lemme 1.7.20 et du lemme 1.7.21 que

$$\Big|\int_\Omega \chi g_j H_m(u_j) - \int_\Omega \chi h_j H_m(u_j)\Big| \leq C.\int_U H_m(u_j) \leq C.\epsilon. \tag{1.7.11}$$

On obtient également

$$\Big|\int_\Omega \chi g\, H_m(u) - \int_\Omega \chi h\, H_m(u)\Big| \leq C.\int_U H_m(u) \leq C.\liminf_{j\to+\infty}\int_U H_m(u_j) \leq C.\epsilon. \tag{1.7.12}$$

De plus, comme h est continue sur Ω et $H_m(u_j) \rightharpoonup H_m(u)$, on obtient

$$\lim_{j\to+\infty}\int_\Omega \chi.h(H_m(u_j) - H_m(u)) = 0.$$

On obtient donc

$$\limsup_{j\to+\infty}\Big|\int_\Omega \chi h_j\, H_m(u_j) - \int_\Omega \chi h\, H_m(u)\Big| \quad\leq\quad \limsup_{j\to+\infty}\int_\Omega \chi.|h_j - h| H_m(u_j). \tag{1.7.13}$$

Comme h_j converge uniformément vers h sur $K \cap \operatorname{supp}\chi$, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \chi.|h_j - h|H_m(u_j) &= \int_U \chi.|h_j - h|H_m(u_j) + \int_K \chi.|h_j - h|H_m(u_j) \\ &\leq C.\int_U H_m(u_j) + \|h_j - h\|_{L^\infty(K\cap\operatorname{supp}\chi)}\int_\Omega \chi H_m(u_j). \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

D'après (1.7.13) et (1.7.14) on obtient

$$\limsup_{j\to+\infty}\Big|\int_\Omega \chi h_j\, H_m(u_j) - \int_\Omega \chi h\, H_m(u)\Big| \quad\leq\quad C.\epsilon. \tag{1.7.15}$$

D'après (1.7.11), (1.7.12) et (1.7.15), on voit bien que

$$\limsup_j\Big|\int_\Omega \chi g_j H_m(u_j) - \int_\Omega \chi g H_m(u)\Big| \leq C.\epsilon.$$

On vient de montrer que $g_jH_m(u_j) \rightharpoonup gH_m(u)$. De façon similaire, on obtient

$$g_jH_m(\max(u_j, v)) \rightharpoonup gH_m(\max(u, v)),$$

et donc $gH_m(u) = gH_m(\max(u, v))$. Le résultat s'en suit en faisant $\delta \to 0$. □

Théorème 1.7.23. *Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$ telles que $u \leq v$ sur Ω. Alors*

$$\int_\Omega H_m(u) \geq \int_\Omega H_m(v).$$

Démonstration. Soient $(u_j),(v_j)$ deux suites dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroissent vers u, v respectivement et $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. On peut supposer que $u_j \leq v_j,\ \forall j$. D'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_\Omega (-h)H_m(v_j) \leq \int_\Omega (-h)H_m(u_j).$$

D'après le corollaire 1.7.17, on obtient

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega (-h)H_m(v_j) = \int_\Omega (-h)H_m(v), \quad \text{et} \quad \lim_{j\to\infty}\int_\Omega (-h)H_m(u_j) = \int_\Omega (-h)H_m(u).$$

Par conséquent, on obtient

$$\int_\Omega (-h)H_m(v) \leq \int_\Omega (-h)H_m(u).$$

Le résultat s'en suit en faisant décroître h vers -1. □

Théorème 1.7.24. *Si $u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ alors $e_p(u) := \int_\Omega (-u)^p H_m(u) < +\infty$. Si $(u_j^i)_j, i = 0, ..., m \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$, $u_j^i \downarrow u^i \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ alors*

$$\int_\Omega (-u_j^0) dd^c u_j^1 \wedge ... \wedge dd^c u_j^m \wedge \beta^{n-m} \nearrow \int_\Omega (-u) dd^c u^1 \wedge ... \wedge dd^c u^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Démonstration. D'après le théorème 1.7.16, on a

$$T_j := dd^c u_j^1 \wedge ... \wedge dd^c u_j^m \wedge \beta^{n-m} \rightharpoonup T := dd^c u^1 \wedge ... \wedge dd^c u^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Par ailleurs, comme $(-u_j^0) \uparrow (-u^0)$ et elles sont semi-continues inférieurement, on a

$$\liminf_j \int_\Omega (-u_j^0) T_j \geq \int_\Omega (-u^0) T.$$

Donc, il suffit de montrer que

$$\int_\Omega (-u^0) T_j \leq \int_\Omega (-u^0) T, \forall j.$$

Soit $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ telle que $u^0 \leq h$. Puisque la formule d'intégration par parties est valide dans $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$, la suite $(\int_\Omega (-h) T_j)_j$ est croissante et sa limite vaut $\int_\Omega (-h) T$, d'après le corollaire 1.7.17. D'où le résultat. □

Théorème 1.7.25. *Si $p > 0$ et $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ on a*

$$\int_{\{u>v\}} H_m(u) \leq \int_{\{u>v\}} H_m(v).$$

Démonstration. Fixons $h \in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{C}(\Omega)$. La mesure $H_m(v)$ ne charge pas des ensembles m-polaire. Comme dans la preuve de la proposition 1.7.12 on peut montrer sans difficulté que

$$\int_{v=ru} (-h) H_m(v) = 0$$

pour presque tous r. Cela nous permet de supposer que $\int_{u=v} (-h) H_m(v) = 0$.
D'après le théorème 1.7.22, on a

$$1\!\!1_{\{u>v\}} H_m(u) = 1\!\!1_{\{u>v\}} H_m(\max(u, v)), \text{ et } 1\!\!1_{\{u<v\}} H_m(v) = 1\!\!1_{\{u<v\}} H_m(\max(u, v)).$$

Par ailleurs, comme dans la preuve du théorème 1.7.23, on peut montrer que

$$\int_\Omega (-h) H_m(\max(u, v)) \leq \int_\Omega (-h) H_m(u).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{\{u>v\}} (-h) H_m(u) &= \int_{\{u>v\}} (-h) H_m(\max(u, v)) \\
&\leq \int_\Omega (-h) H_m(\max(u, v)) + \int_{\{u<v\}} h H_m(\max(u, v)) \\
&\leq \int_\Omega (-h) H_m(v) + \int_{\{u<v\}} h H_m(v) = \int_{\{u>v\}} (-h) H_m(v).
\end{aligned}$$

En faisant $h \downarrow -1$ on obtient le résultat. □

Remarque 1.7.26. On vient de démontrer ci-dessus que

$$\int_{\{u>v\}}(-h)H_m(v) \leq \int_{\{u>v\}}(-h)H_m(u)$$

si $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega), p > 0$ et $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Grâce au théorème de régularisation (théorème 1.7.1) elle est aussi valide pour toute $h \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$.

Théorème 1.7.27. *Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ $(p > 0)$ tellles que $H_m(u) \geq H_m(v)$. Alors $u \leq v$ dans Ω.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $v(z_0) < u(z_0)$. Soit h une fonction d'exhaustion de Ω et choisit $R > 0$ tel que $|z - z_0| \leq R, \forall z \in \Omega$. Fixe $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que $h(z_0) < -\epsilon R^2$. La fonction d'exhaustion

$$P(z) := \max\{h(z), \epsilon(|z - z_0|^2 - R^2)\}.$$

est continue dans Ω et vérifie $H_m(P) \geq \epsilon^m \beta^n$, près de z_0. Rappelons que $v(z_0) < u(z_0)$, et prenons $\eta > 0$ assez petit tel que $v(z_0) < u(z_0) + \eta P(z_0)$. La mesure de Lebesgue de l'ensemble $T := \{z \in \Omega \ / \ v(z) < u(z) + \eta P(z)\} \cap B(z_0, \delta)$ est > 0 pour tout $\delta > 0$. Ceci entraîne que

$$\int_T H_m(P) > 0.$$

D'après le théorème 1.7.25 on a

$$\int_T H_m(u + \eta P) \leq \int_T H_m(v).$$

Par ailleurs,

$$\int_T H_m(u + \eta P) \geq \int_T H_m(u) + \eta^m \int_T H_m(P),$$

et $H_m(v)$ est, par hypothèse, plus petite ou égale à $H_m(u)$. Par conséquent on obtient une contradiction

$$\int_T H_m(P) = 0.$$

□

1.8 La méthode variationnelle

Dans ce paragraphe on introduit la méthode variationnelle pour étudier des équations hessiennes complexes assez singulières. On cherche à résoudre dans les classes d'énergie finie de type Cegrell

$$H_m(u) = \mu,$$

où μ est une mesure de Radon positive. On caractérise complètement l'image de $H_m(u), u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$.

L'idée de cette méthode est de minimiser la fonctionnelle d'énergie sur un ensemble compact de fonctions m-sh. On montre ensuite que ce point minimum est la solution cherchée. Ces résultats sont des généralisations directes de ceux de la théorie du pluripotentiel s'inspirant de la méthode développée dans [BBGZ09] et [Ceg98, Ceg04, ACC10].

1.8.1 La fonctionnelle d'énergie

On rappelle quelques résultats utiles.

— Si $0 \geq u_j \downarrow u$ et $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, d'après le théorème 1.7.24, on a $e_1(u_j) \uparrow e_1(u)$.

— Si $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et $u \leq v$ alors $e_1(u) \geq e_1(v)$.

Lemme 1.8.1. *(i) Si $(u_j) \subset \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ alors $(\sup_j u_j)^* \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.*

(ii) Si $(u_j) \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $\sup_j e_1(u_j) < +\infty$ et $u_j \downarrow u$, alors $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

(iii) $\mathcal{E}^{1,C}_m := \{u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega) \ / \ e_1(u) \leq C\}$ est un convexe compact de $\mathcal{SH}_m(\Omega)$, pour chaque $C > 0$.

Démonstration. (i) Soient (φ_j) une suite de fonctions continues dans $\mathcal{E}^0_m(\Omega)$ telle que $\varphi_j \downarrow \varphi := (\sup_j u_j)^*$. Comme $u_j \leq \varphi_j$, on a $\sup_j e_1(\varphi_j) < +\infty$, qui entraîne que $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

(ii) Soit (φ_j) une suite dans $\mathcal{E}^0_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ telle que $\varphi_j \downarrow u$. On pose $\psi_j := \max(u_j, \varphi_j)$. Alors $\psi_j \in \mathcal{E}^1_m(\Omega), \forall j$ et $e_1(\psi_j) \leq e_1(u_j)$. Donc, $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

(iii) Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{E}^{1,C}_m$. Comme $\sup_j e_1(u_j) < +\infty$, (u_j) peut pas tendre uniformément vers $-\infty$ dans Ω. Il existe donc une sous suite notée (encore) (u_j) telle que u_j converge vers $u \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Posons

$$\varphi_j := (\sup_{k \geq j} u_k)^* \in \mathcal{E}^1_m(\Omega), \forall j.$$

Alors $\varphi_j \downarrow u$ et $\sup_j e_1(\varphi_j) \leq C$. Donc, d'après (ii), on a $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, et comme $(-\varphi_j) \uparrow (-u)$ et elles sont semi-continues inférieurement, on a

$$\int_\Omega (-u) H_m(u) \leq \liminf_j \int_\Omega (-\varphi_j) H_m(\varphi_j) \leq C.$$

Cela signifie que $u \in \mathcal{E}^{1,C}_m$. □

Lemme 1.8.2. *Soit μ une mesure de Radon positive dans Ω telle que $\mu(\Omega) < +\infty$ et μ ne charge pas des ensembles m-polaires. Soit (u_j) un suite dans $\mathcal{SH}^-_m(\Omega)$ qui converge dans L^1_{loc} vers $u \in \mathcal{SH}^-_m(\Omega)$. Si $\sup_j \int_\Omega (-u_j)^2 d\mu < +\infty$ alors $\int_\Omega u_j d\mu \to \int_\Omega u d\mu$.*

Démonstration. Comme $\int_\Omega u_j d\mu$ est bornée, il suffit de prouver que tout point d'adhérence est $\int_\Omega u d\mu$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\int_\Omega u_j d\mu$ converge. La suite u_j étant bornée dans $L^2(\mu)$, le théorème de Banach-Saks nous permet d'extraire une sous suite (encore notée par u_j) telle que

$$\varphi_N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j$$

converge dans $L^2(\mu)$ et μ-presque partout vers φ. Observe également que $\varphi_N \to u$ dans L^1_{loc}. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$ on pose

$$\psi_j := (\sup_{k \geq j} \varphi_k)^*.$$

Alors $\psi_j \downarrow u$ dans Ω. Comme μ ne charge pas l'ensemble m-polaire

$$\{(\sup_{k \geq j} \varphi_k)^* > \sup_{k \geq j} \varphi_k\},$$

on obtient $\psi_j = \sup_{k \geq j} \varphi_k$ μ-presque partout. Par conséquent, ψ_j converge vers φ μ-presque partout et donc $u = \varphi$ μ-presque partout. Cela entraîne que

$$\lim_j \int_\Omega u_j d\mu = \lim_j \int_\Omega \varphi_j d\mu = \int_\Omega u d\mu.$$

□

Lemme 1.8.3. *La fonctionnelle $e_1 : \mathcal{E}^1_m(\Omega) \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Supposons que $u, u_j \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et u_j converge vers u dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Il suffit de montrer que $\liminf_j e_1(u_j) \geq e_1(u)$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\varphi_j := (\sup_{k \geq j} u_k)^*$$

appartient à $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et $\varphi_j \downarrow u$. D'où $e_1(\varphi_j) \uparrow e_1(u)$. Or, $e_1(u_j) \geq e_1(\varphi_j)$ donc le résultat s'en suit. □

Définition 1.8.4. Une mesure de Radon positive μ appartient à $\mathcal{M}_1$ s'il existe $A > 0$ tel que

$$\int_\Omega (-\varphi) d\mu \leq A e_1(\varphi)^{1/(m+1)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega).$$

La fonctionnelle $\mathcal{F}_\mu : \mathcal{E}^1_m(\Omega) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\mathcal{F}_\mu(u) = \frac{1}{m+1} \int_\Omega (-u) H_m(u) + \int_\Omega u d\mu.$$

Lemme 1.8.5. *Pour tous $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$,*

$$e_1(u+v)^{\frac{1}{m+1}} \leq e_1(u)^{\frac{1}{m+1}} + e_1(v)^{\frac{1}{m+1}}.$$

De plus, $\mathcal{F}_\mu$ est convexe si $\mu \in \mathcal{M}_1$. Dans ce cas, $\mathcal{F}_\mu$ est propre au sens où $\mathcal{F}_\mu(u_j) \to +\infty$ dès que $e_1(u_j) \to +\infty$.

Démonstration. Il résulte du lemme 1.7.8 que

$$e_1(u+v) \leq e_1(u)^{\frac{1}{m+1}} e_1(u+v)^{\frac{m}{m+1}} + e_1(v)^{\frac{1}{m+1}} e_1(u+v)^{\frac{m}{m+1}}$$

qui entraîne que $e_1^{\frac{1}{m+1}}$ est convexe, donc e_1 l'est aussi. De la définition de $\mathcal{M}_1$ on voit qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^1(\mu)} \leq A e_1(u)^{\frac{1}{1+m}}, \qquad \text{pour toute } u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega).$$

On obtient donc

$$\mathcal{F}_\mu(u_j) = \frac{1}{m+1} e_1(u_j) - \|u_j\|_{L^1(\mu)} \geq \frac{1}{n+1} e_1(u_j) - A e_1(u_j)^{\frac{1}{m+1}} \to \infty.$$

□

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi continue supérieurement. Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $w \leq u$. On définit la projection de u sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$ par

$$P(u) := \sup\{v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega) \ / \ v \leq u\}.$$

Lemme 1.8.6. *Soient $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ et supposons que v est continue. Pour chaque $t < 0$, la fonction $P(u+tv)$ appartient à $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$, et pour chaque $s < 0$,*

$$|P(u+tv) - P(u+sv)| \leq |t-s|(-v).$$

Démonstration. Fixons $t < 0$. La fonction $P(u+tv)$ est semi-continue supérieurement. De plus, il est clair que $u \leq P(u+tv) \leq u+tv$, ce qui implique que $P(u+tv) \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$. Pour tout $s < t$, on a

$$P(u+tv) \leq P(u+sv), \quad \text{et} \quad P(u+sv) + (t-s)v \leq P(u+tv).$$

D'où, $|P(u+tv) - P(u+sv)| \leq |t-s|(-v)$. □

Lemme 1.8.7. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ telle que $w \leq u$. Alors*

$$\int_{\{P(u)<u\}} H_m(P(u)) = 0. \tag{1.8.1}$$

Démonstration. Sans perte de générgalité, on peut supposer que w est bornée. D'après le lemme de Choquet, il existe une suite croissante $(u_j) \subset \mathcal{E}_m^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que

$$(\lim_j u_j)^* = P(u).$$

Soit $x_0 \in \{P(u) < u\}$. Comme u est continue, il existe $\epsilon > 0, r > 0$ tels que

$$P(u)(x) < u(x_0) - \epsilon < u(x), \quad \forall x \in B = B(x_0, r).$$

Pour chaque j fixé, en approximant $u_j|_{\partial B}$ par au-dessus par une suite de fonctions continues sur ∂B et en utilisant [DK11, Theorem 2.10], on peut trouver une fonction $\varphi_j \in \mathcal{SH}_m(B)$ telle que $\varphi_j = u_j$ sur ∂B et $H_m(\varphi_j) = 0$ dans B. D'après le principe de comparaison, $\varphi_j \geq u_j$ dans B. La fonction ψ_j, définie par $\psi_j = \varphi_j$ dans B et $\psi_j = u_j$ dans $\Omega \setminus B$, appartient à $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $x \in \partial B$, on a $\varphi_j(x) = u_j(x) \leq P(u)(x) \leq u(x_0) - \epsilon$. On en déduit que $\varphi_j \leq u(x_0) - \epsilon$ dans B car $u(x_0) - \epsilon$ est une constante et φ_j est m-sh. Donc, $u_j \leq \psi_j \leq u$ sur Ω. Cela entraine que

$$(\lim \psi_j)^* = P(u).$$

D'après le théorème 1.3.10, on a $H_m(\psi_j) \rightharpoonup H_m(P(u))$. Donc $H_m(P(u))(B) = 0$, d'où le résultat. □

Lemme 1.8.8. *Soient $u, v \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$, et supposons que v est continue. Pour chaque $t < 0$, on définit*

$$h_t = \frac{P(u + tv) - tv - u}{t}.$$

Alors pour tout $0 \leq k \leq m$,

$$\lim_{t \nearrow 0} \int_\Omega h_t (dd^c u)^k \wedge (dd^c P(u + tv))^{m-k} \wedge \beta^{n-m} = 0\,. \tag{1.8.2}$$

En particulier,

$$\lim_{t \nearrow 0} \int_\Omega \frac{P(u + tv) - u}{t} (dd^c u)^k \wedge (dd^c P(u + tv))^{m-k} \wedge \beta^{n-m} = \int_\Omega v H_m(u)\,. \tag{1.8.3}$$

Démonstration. Un calcul facile montre que h_t est décroissante en t, et $0 \leq h_t \leq -v$. Pour chaque $s < 0$ fixé on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \nearrow 0} \int_\Omega h_t (dd^c u)^k \wedge (dd^c P(u + tv))^{m-k} \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq \lim_{t \nearrow 0} \int_\Omega h_s (dd^c u)^k \wedge (dd^c P(u + tv))^{m-k} \wedge \beta^{n-m} \\
&= \int_\Omega h_s (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq \int_{\{P(u+sv)-sv<u\}} (-v)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Soit $u_k \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap C(\Omega)$ une suite décroissante qui converge vers u telle que

$$\int_{\{P(u+sv)-sv<u\}} (-v)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \leq 2 \int_{\{P(u_k+sv)-sv<u\}} (-v)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}\,.$$

D'après la remarque 1.7.26 et le lemme 1.8.7, on pourra conclure que

$$\begin{aligned}
&\int_{\{P(u_k+sv)-sv<u\}} (-v)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq \int_{\{P(u_k+sv)-sv<u_k\}} (-v)(dd^c(P(u_k+sv)-sv))^m \wedge \beta^{n-m} \\
&\leq -sM \to 0\,, \qquad \text{quand } s \to 0.
\end{aligned}$$

Ici, M désigne une constante qui ne dépend que de m, $\|v\|$, et de $\int_\Omega v(dd^c(u+v))^m \wedge \beta^{n-m}$. L'équalité (1.8.3) est tirée de l'égalité (1.8.2). La preuve est donc complète. □

Lemme 1.8.9. *Soient $u, v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, et supposons que v est continue. La fonction*

$$g(t) = e_1(P(u+tv)),\ t \in \mathbb{R}$$

est différentiable en 0 et

$$g'(0) = (m+1)\int_\Omega (-v)H_m(u).$$

Démonstration. Si $t > 0$, $P(u+tv) = u+tv$. Un simple calcul montre que

$$g'(0^+) = (m+1)\int_\Omega (-v)H_m(u).$$

Pour calculer la dérivée à gauche, remarquons que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\left(\int_\Omega (-P(u+tv))(dd^c P(u+tv))^m \wedge \beta^{n-m} - \int_\Omega (-u)(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \int_\Omega \frac{u - P(u+tv)}{t}(dd^c u)^k \wedge (dd^c P(u+tv))^{m-k} \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 1.8.8. □

1.8.2 Résolution

Dans ce paragraphe on utilise les formules variationnelles établies ci-dessus pour résoudre $H_m(u) = \mu$, et pour donner une caractérisation de ce type de mesures. Le lemme suivant est important pour la suite.

Lemme 1.8.10. *Soit μ une mesure de Radon positive qui satisfait $\mu(\Omega) < +\infty$. Supposons qu'il existe $A > 0$ telle que*

$$\int_\Omega (-\varphi)^2\, d\mu \leq A\, e_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}} \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega). \tag{1.8.4}$$

Alors $\mu \in \mathcal{M}_1$. De plus, pour toute suite $\{v_j\} \subset \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $\sup_j e_1(v_j) < +\infty$, il existe une sous suite $\{v_{j_k}\}$ telle que

$$\int_\Omega v_{j_k} d\mu \to \int_\Omega v d\mu.$$

Finalement, il existe une unique function $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$, telle que $H_m(u) = \mu$.

Démonstration. Fixons $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$. On déduit de (1.8.4) qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\varphi)\, d\mu \leq \left(\int_\Omega (-\varphi)^2\, d\mu\right)^{1/2} \mu(\Omega)^{1/2} &\leq A^{1/2} e_1(\varphi)^{\frac{1}{m+1}} \mu(\Omega)^{1/2} \\ &= Ce_1(\varphi)^{\frac{1}{m+1}} < +\infty\,, \qquad \text{où } C = A^{1/2}\mu(\Omega)^{1/2}\,,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mu \in \mathcal{M}_1$.

Supposons maintenant que $\{v_j\} \subset \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ satisfait $\sup_j e_1(v_j) = C < +\infty$. D'après la compacité de $\mathcal{E}^{1,C}_m$ (lemme 1.8.1), on pourra en extraire une sous suite (encore notée v_j) qui converge au sens des distributions vers $v \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$. L'inégalité (1.8.4) nous donne

$$\sup_j \int_\Omega (-v_j)^2\, d\mu < +\infty.$$

D'après le lemme 1.8.2, on voit que $\int_\Omega v_j\, d\mu \to \int_\Omega v\, d\mu$.

Montrons la dernière affirmation. Soit $(u_j) \subset \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que

$$\lim_j \mathcal{F}_\mu(u_j) = \inf_{v\in\mathcal{E}^1_m(\Omega)} \mathcal{F}_\mu(v) \leq 0.$$

D'après la propreté de la fonctionnelle $\mathcal{F}_\mu$ (lemme 1.8.5), on obtient $\sup_j e_1(u_j) < +\infty$. Il résulte de la première partie qu'il existe une sous-suite (encore notée (u_j)) telle que u_j converge vers u dans $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ et telle que $\int_\Omega u_j d\mu \to \int_\Omega u d\mu$. D'après le lemme 1.8.3, e_1 est semi continue inférieurement. Donc,

$$\liminf_{j\to\infty} \mathcal{F}_\mu(u_j) = \liminf_{j\to\infty} e_1(u_j) + \lim_{j\to\infty}\int_\Omega u_j d\mu \geq e_1(u) - \|u\|_1 = \mathcal{F}_\mu(u)\,.$$

On en déduit que u est un point minimum de $\mathcal{F}_\mu$ sur $\mathcal{E}^1_m(\Omega)$.

Soit maintenant $v \in \mathcal{E}^0_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. La fonction $g(t) := \frac{1}{m+1} e_1(P(u+tv)) + \int_\Omega (u+tv) d\mu$ est différentiable en 0 et

$$g'(0) = -\int_\Omega vH_m(u) + \int_\Omega v d\mu.$$

Comme $P(u+tv) \leq u+tv$, on a $g(t) \geq \mathcal{F}_\mu(e_1(P(u+tv)) \geq \mathcal{F}_\mu(u) = g(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Donc $g'(0) = 0$, ceci donne

$$\int_\Omega vH_m(u) = \int_\Omega v d\mu.$$

□

Théorème 1.8.11. *Si $\mu \in \mathcal{M}_1$ alors il existe une unique $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $H_m(u) = \mu$.*

Démonstration. Le fait que la solution soit unique est une conséquence immédiate du principe de comparaison.

Montrons l'existence. Supposons tout d'abord que μ est à support compact dans $K \Subset \Omega$, et posons $h_K := h^*_{m,K,\Omega}$ la fonction m-extrémale de K par rapport à Ω. Posons

$$\mathcal{M} = \left\{\nu \geq 0 \ / \ \mathrm{supp}\nu \subset K,\ \int_\Omega (-\varphi)^2 d\nu \leq Ce_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}} \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)\right\},$$

où C désigne une constante fixée telle que $C > 2e_1(h_K)^{\frac{n-1}{n+1}}$. Pour chaque compact $L \subset K$, on a $h_K \leq h_L$. On en déduit que $e_1(h_L) \leq e_1(h_K)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\varphi)^2 H_m(h_L) &\leq 2\|h_L\| \int_\Omega (-\varphi)(dd^c\varphi) \wedge (dd^c h_L)^{m-1} \wedge \omega^{n-m} \\ &\leq 2\left(\int_\Omega (-\varphi) H_m(\varphi)\right)^{\frac{2}{m+1}} \left(\int_\Omega (-h_L) H_m(h_L)\right)^{\frac{m-1}{m+1}} \\ &\leq Ce_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}},\end{aligned}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$. Cela implique que $H_m(h_L) \in \mathcal{M}$ pour tout compact $L \subset K$.

Posons $T = \sup\{\nu(\Omega)\ /\ \nu \in \mathcal{M}\}$. On affirme que $T < +\infty$.
En effet, comme Ω est m-hyperconvexe, il existe une $h \in \mathcal{SH}^-_m(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ telle que

$$K \Subset \{h < -1\} \Subset \Omega.$$

Pour toute $\nu \in \mathcal{M}$, on a

$$\nu(K) \leq \int_K (-h)d\nu \leq C.e_1(h)^{\frac{2}{m+1}},$$

d'où l'affirmation s'en suit.

Fixons $\nu_0 \in \mathcal{M}$ telle que $\nu_0(\Omega) > 0$. Définissons

$$\mathcal{M}' = \Bigg\{\nu \geq 0\ /\ \nu(\Omega) = 1,\ \mathrm{supp}\nu \subset K,$$
$$\int_\Omega (-\varphi)^2 d\nu \leq \left(\frac{C}{T} + \frac{C}{\nu_0(\Omega)}\right) e_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}} \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)\Bigg\},$$

Alors, pour chaque $\nu \in \mathcal{M}$ et $\varphi \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\varphi)^2 \frac{(T-\nu(\Omega))d\nu_0 + \nu_0(\Omega)d\nu)}{T\nu_0(\Omega)} &\leq \frac{T-\nu(\Omega)}{T\nu_0(\Omega)}\int_\Omega (-\varphi)^2 d\nu_0 + \frac{1}{T}\int_\Omega (-\varphi)^2 d\nu \\ &\leq \left(C\frac{T-\nu(\Omega)}{T\nu_0(\Omega)} + \frac{C}{T}\right) e_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}} \\ &\leq \left(\frac{C}{\nu_0(\Omega)} + \frac{C}{T}\right) e_1(\varphi)^{\frac{2}{m+1}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{(T-\nu(\Omega))\nu_0 + \nu_0(\Omega)\nu)}{T\nu_0(\Omega)} \in \mathcal{M}',\ \text{ pour toute } \nu \in \mathcal{M}.$$

On pourra conclure que $\mathcal{M}'$ est un ensemble (non vide) convexe et faiblement compact dans l'espace des mesures de probabilité.
Il résulte de [Rai69] qu'il existe une mesure $\nu \in \mathcal{M}'$ et une fonction $f \in L^1(\nu)$ telles que $\mu = f\,d\nu + \nu_s$, où ν_s est orthogonale à $\mathcal{M}'$. Remarquons que toutes mesures orthogonales à $\mathcal{M}'$ sont à support dans un ensemble m-polaire puisque $H_m(h_L) \in \mathcal{M}$ pour tout $L \Subset K$. On en déduit que $\nu_s \equiv 0$ car μ ne charge pas des ensembles m-polaires.

D'après le lemme 1.8.10, pour chaque $\lambda \in \mathcal{M}'$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $(dd^c u)^n = \lambda$.
Pour chaque $j \in \mathbb{N}$ posons $\mu_j = \min(f, j)\nu$. Alors μ_j satisfait (1.8.4) comme ν puisque $\mu_j \leq j.\nu$. Par conséquent, il existe $u_j \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ telle que $H_m(u_j) = \mu_j$. Il est clair que $\{u_j\}$ décroît vers une fonction $u \in \mathcal{E}^1_m(\Omega)$ qui vérifie $H_m(u) = \mu$.

Pour terminer la preuve, il reste à traiter le cas où μ est seulement dans $\mathcal{M}_1$. Soit $\{K_j\}$ une suite d'exhaustion de compacts de Ω et considérons $\mu_j = \chi_{K_j} d\mu$. Remarquons que (u_j) décroît vers $u \in \mathcal{SH}^-_m(\Omega)$. Il suffit de montrer que $\sup_j e_1(u_j) < +\infty$. Comme $\mu \in \mathcal{M}_1$, on a

$$e_1(u_j) = \int_\Omega (-u_j)H_m(u_j) = \int_{K_j} (-u_j)d\mu \leq \int_\Omega (-u_j)d\mu \leq Ae_1(u_j)^{\frac{1}{m+1}},$$

ce qui implique que $e_1(u_j)$ est uniformément bornée, d'où le résultat. $\square$

Lemme 1.8.12. *Soit μ une mesure positive de masse finie, $\mu(\Omega) < +\infty$, telle que $\mu \leq H_m(\psi)$, où ψ est une fonction m-sousharmonique bornée dans Ω. Alors il existe une unique fonction $\varphi \in \mathcal{F}_m^1(\Omega)$ telle que $\mu = H_m(\varphi)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $-1 \leq \psi \leq 0$. Considérons $h_j = \max(\psi, jh)$, où $h \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ est une fonction d'exhaustion de Ω. Posons $A_j := \{z \in \Omega \ / \ jh < -1\}$. D'après le théorème 1.8.11, il existe $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que $H_m(\varphi_j) = 1\!\!1_{A_j}\mu, \ \forall j$. Par conéquent,

$$0 \geq \varphi_j \geq h_j \geq \psi, \text{ and } \varphi_j \downarrow \varphi \in \mathcal{F}_m^1(\Omega).$$

□

On démontre maintenant un théorème de décomposition de type Cegrell.

Théorème 1.8.13. *Soit μ une mesure positive dans Ω qui ne charge pas les ensembles m-polaires. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $0 \leq f \in L^1_{\mathrm{loc}}(H_m(\varphi))$ telles que $\mu = f.H_m(\varphi)$.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que μ est à support compact. On utilise le théorème 1.8.11 pour trouver $u \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ et $0 \leq f \in L^1(H_m(u))$ telles que $\mu = f.H_m(u)$, et $\mathrm{supp} H_m(u) \Subset \Omega$. Considérons

$$\psi = (-u)^{-1} \in \mathcal{SH}_m(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Alors $(-u)^{-2m} H_m(u) \leq H_m(\psi)$. Puisque $H_m(u)$ est à support compact dans Ω, on pourra modifier ψ au voisinage de $\partial\Omega$ de sorte que $\psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. D'après le lemme 1.8.12, on a

$$(-u)^{-2m} H_m(u) = H_m(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega).$$

Cela nous donne $\mu = f(-u)^{2m}.H_m(\varphi)$.

Reste à traiter le cas où μ n'est pas à support compact. Soit (K_j) une suite de compacts exhaustive de Ω. D'après ce qui précède il existe $u_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ et $f_j \in L^1(H_m(u_j))$ telle que $1\!\!1_{K_j}\mu = f_j H_m(u_j)$. Prenons une suite de nombres positives (a_j) qui vérifie $\varphi := \sum_{j=1}^\infty a_j u_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. La mesure μ est absolument continue par rapport à $H_m(\varphi)$. Donc,

$$\mu = g H_m(\varphi) \text{ et } g \in L^1_{\mathrm{loc}}(H_m(\varphi)).$$

□

Proposition 1.8.14. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω. Alors $\mu \in \mathcal{M}_1$ si et seulement si $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^1(\mu)$.*

Démonstration. L'implication "⇒" est évidente. Pour l'autre implication "⇐", on va raisonner par l'absurde. Supposons que μ satisfait $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \subset L^1(\mu)$, et qu'il existe une suite $(u_j) \subset \mathcal{E}_m^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (-u_j) d\mu \geq j e_1(u_j)^{\frac{1}{m+1}}.$$

On pourra supposer que $e_1(u_j) = 1, \forall j$. Pour chaque j, posons $v_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^2} u_k$. D'après le lemme 1.8.5, on a

$$e_1(v_j)^{\frac{1}{m+1}} \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^2} e_1(u_k)^{\frac{1}{m+1}} = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^2}.$$

Cela implique que $v = \lim_{j\to+\infty} v_j \in \mathcal{E}_m^1(\Omega)$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse on a

$$\int_\Omega (-v) d\mu \geq \sum_{j=1}^\infty \frac{j}{j^2} = +\infty,$$

ce qui entraîne une contradiction $\mathcal{E}_m^1(\Omega) \not\subset L^1(\mu)$. □

Les mêmes raisonnements peuvent être employés pour les classes $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$, $p > 0$.

Proposition 1.8.15. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω et $p > 0$. Alors $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\mu)$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_\Omega (-u)^p d\mu \leq C e_p(u)^{\frac{p}{m+p}}, \ \forall u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega).$$

Démonstration. L'implication "$\Leftarrow$" est évidente. Pour l'autre implication "$\Rightarrow$", on suppose que μ satisfait $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\mu)$ et qu'il existe une suite $(u_j) \subset \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (-u_j)^p d\mu \geq 4^{jp} e_p(u_j)^{\frac{p}{m+p}}.$$

On peut supposer que $e_p(u_j) = 1, \forall j$. D'après le corollaire 1.7.11, $v = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} v_j$ appartient à $\mathcal{E}_m^p(\Omega)$. Pourtant,

$$\int_\Omega (-v)^p d\mu \geq \int_\Omega (-2^{-j} v_j)^p d\mu \geq 2^{jp} \to +\infty,$$

ce qui implique que $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \not\subset L^p(\mu)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 1.8.16. Si $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ et $(u_j), (v_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ décroissent vers u, v respectivement, alors d'après le lemme 1.7.8 et la proposition 1.7.10,

$$\int_\Omega (-u)^p H_m(v) \leq \liminf_j \int_\Omega (-u_j)^p H_m(v_j) < +\infty.$$

Donc, $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(H_m(v))$ et la proposition 1.8.15 assure qu'il existe $C_v > 0$ telle que

$$\int_\Omega (-u)^p H_m(v) \leq C_v e_p(u)^{\frac{p}{p+m}}, \ \forall u \in \mathcal{E}_m^p(\Omega).$$

Il n'est pas clair que l'on puisse obtenir cette inégalité directement en utilisant l'inégalité de Hölder.

Théorème 1.8.17. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω telle que $\mathcal{E}_m^p(\Omega) \subset L^p(\mu), p > 0$. Alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ telle que $H_m(\varphi) = \mu$.*

Démonstration. Puisque μ ne charge pas des ensembles m-polaires, le théorème de décomposition de type Cegrell (Theorem 1.8.13) nous donne

$$\mu = f H_m(u), \ \ u \in \mathcal{E}_m^0(\Omega), \ 0 \leq f \in L^1_{\text{loc}}(H_m(u)).$$

Pour chaque j, on utilise le lemme 1.8.12 pour trouver $\varphi_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que

$$H_m(\varphi_j) = \min(f, j) H_m(u).$$

D'après la proposition 1.8.15, $\sup_j e_p(\varphi_j) < +\infty$. Donc, d'après le principe de comparaison, $\varphi_j \downarrow \varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ qui résout $H_m(\varphi) = \mu$. L'unicité résulte du principe de comparaison. $\square$

Par le même raisonnement, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.8.18. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω telle que $\mu(\Omega) < +\infty$. Si μ ne charge pas les ensembles m-polaires, alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ telle que $H_m(\varphi) = \mu$.*

Démonstration. Puisque μ ne charge pas des ensembles m-polaires, le théorème de décomposition de type Cegrell (Theorem 1.8.13) nous donne

$$\mu = f H_m(u), \ \ u \in \mathcal{E}_m^0(\Omega), \ 0 \leq f \in L^1_{\text{loc}}(H_m(u)).$$

Pour chaque j, on utilise le lemme 1.8.12 pour trouver $\varphi_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que

$$H_m(\varphi_j) = \min(f, j) H_m(u).$$

Or, $\sup_j \int_\Omega H_m(\varphi_j) \leq \mu(\Omega) < +\infty$. Donc, d'après le principe de comparaison, $\varphi_j \downarrow \varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ qui résout $H_m(\varphi) = \mu$. L'unicité résulte du principe de comparaison. $\square$

Proposition 1.8.19. *Soient* $u, v \in \mathcal{E}_m^p(\Omega),\ p > 0$. *Il existe deux suites décroissantes* $(u_j), (v_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ *telles que* $u_j \downarrow u,\ v_j \downarrow v$, *et*

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega (-u_j)^p H_m(v_j) = \int_\Omega (-u)^p H_m(v).$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$, *il existe* $(\varphi_j) \subset \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ *qui décroît vers* φ *et satisfait*

$$e_p(\varphi_j) \to e_p(\varphi).$$

Démonstration. Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ qui décroît vers u et vérifie $\sup_j \int_\Omega (-u_j)^p H_m(u_j) < +\infty$. Puisque $H_m(v)$ vaut zero sur les m-polaires, le théorème de décomposition de Cegrell (théorème 1.8.13) nous donne

$$H_m(v) = f H_m(\psi), \quad \psi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega),\ 0 \le f \in L^1_{\text{loc}}(H_m(\psi)).$$

Pour chaque j, utilisons le lemme 1.8.12 pour trouver $v_j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$ telle que

$$H_m(v_j) = \min(f, j) H_m(\psi).$$

D'après le principe de comparaison on a $v_j \downarrow \varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$ qui résout $H_m(\varphi) = H_m(v)$, et qui, à son tour, implique que $\varphi \equiv v$. On a alors

$$\int_\Omega (-u)^p H_m(v) = \lim_j \int_\Omega (-u_j)^p \min(f, j) H_m(\psi) = \lim_j \int_\Omega (-u_j)^p H_m(v_j).$$

□

1.9 Exemples

Lemme 1.9.1. *Si* $\varphi \in \mathcal{E}_m^p(\Omega)$, $p > 0$ *alors*

$$Cap_m(\varphi < -t) \le C.e_p(\varphi).\frac{1}{t^{m+p}},$$

où $C > 0$ *désigne une constante qui ne dépend que de* m.

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $\varphi \in \mathcal{E}_m^0(\Omega)$. Fixons $u \in \mathcal{SH}_m^-(\Omega)$ telle que $-1 \le u \le 0$. Observons que, pour chaque $t > 0$,

$$(\varphi < -2t) \subset (\varphi < tu - t) \subset (\varphi < -t).$$

D'après le principe de comparaison (corollaire 1.3.13), on a

$$\begin{aligned} \int_{\{\varphi<-2t\}} H_m(u) &\le \frac{1}{t^m} \int_{\{\varphi<tu-t\}} H_m(tu - t) \le \frac{1}{t^m} \int_{\{\varphi<tu-t\}} H_m(\varphi) \\ &\le \frac{1}{t^m} \int_{\{\varphi<-t\}} H_m(\varphi) \le \frac{1}{t^{m+p}} \int_\Omega (-\varphi)^p H_m(\varphi). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.9.2. *Soit* $\mu = f dV$, *où* $0 \le f \in L^p(\Omega, dV)$, $\frac{n}{m} > p > 1$. *Alors pour tout* $q < \frac{nm(p-1)}{n-mp}$, *il existe* $\varphi \in \mathcal{F}_m^q(\Omega)$ *tel que*

$$\mu = H_m(\varphi).$$

Démonstration. Fixons $0 < r < \frac{n}{n-m}$. D'après l'inégalité de Hölder, et [DK11, Proposition 2.1], il existe $C > 0$ qui ne dépend que de p, r et $\int_\Omega f^p dV$ telle que

$$\mu(K) \leq CVol(K)^{\frac{p-1}{p}} \leq CCap_m(K)^{\frac{r(p-1)}{p}}. \tag{1.9.1}$$

Prenons $0 < q < \frac{nm(p-1)}{n-mp}$ et $u \in \mathcal{E}_q(\Omega)$. D'après le théorème 1.8.17 il suffit de montrer que $u \in L^q(\mu)$, qui est équivalent à montrer que

$$\int_1^{+\infty} \mu(u < -t^{1/q})dt < +\infty,$$

Ce qui est une conséquence immédiate de (1.9.1) et du lemme 1.9.1. □

L'exposant $q(p) = \frac{nm(p-1)}{n-mp}$ est optimal comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.9.3. Considérons $\varphi_\alpha = 1 - \|z\|^{-2\alpha}$, où α est une constante dans $(0, \frac{n-m}{m})$. Un calcul facile montre que $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ et

$$H_m(\varphi_\alpha) = C.\|z\|^{-2m(\alpha+1)}dV = f_\alpha dV.$$

On a donc

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_m^q(\Omega) \Longleftrightarrow q < \frac{n-m}{\alpha} - m,$$

tandis que

$$f_\alpha \in L^p(\Omega, dV) \Longleftrightarrow p < \frac{n}{m(\alpha+1)}.$$

Chapitre 2

Équations hessiennes complexes dégénérées sur les variétés kählériennes compactes

2.1 Introduction

Soient (X,ω) une variété kählérienne compacte de dimension n et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$. On étudie l'équation suivante

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = F(x,\varphi)\omega^n, \tag{2.1.1}$$

où la densité $F : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vérifie certaines conditions naturelles (voir le théorème 2.1.1 ci-dessous).

Le cas $m = 1$ correspond à l'équation de Poisson classique, tandis que le cas $m = n$ correspond à l'équation de Monge-Ampère complexe dégénérée, qui a été étudiée de manière intensive ces dernières années (voir [Bl03, Bl05, Bl12, BGZ08, BK07, EGZ09, GKZ08, GZ05, GZ07, Kol98, Kol02, Kol03, Kol05]). Donc, l'équation (2.1.1) est une généralisation de l'équation de Poisson et de l'équation de Monge-Ampère.

Suivant Blocki [Bl05] on développe une "théorie du potentiel" pour l'équation hessienne complexe sur les variétés kälériennes compactes. On définit la classe des fonctions (ω,m)-sousharmoniques qui est une généralisation de la classe des fonctions ω-plurisousharmoniques quand $m = n$. La définition de l'opérateur hessien complexe pour les fonctions (ω,m)-sh bornées est délicate en raison de l'absence d'un théorème de régularisation.

Pour contourner cette difficulté, on introduit une notion de capacité et l'utilise pour définir le concept de "convergence quasi-uniforme". Ceci nous permet de définir une classe convenable des fonctions (ω,m)-sh quasi-continues pour laquelle l'opérateur hessien complexe est bien défini et continue pour les limites quasi-uniformes. On montrera que cette définition coïncide avec la définition par la méthode de Bedford et Taylor. On obtient également le principe de comparaison et des résultats de convergence pour cet opérateur.

Avec ces outils de théorie du potentiel à disposition, nous considérons l'équation hessienne complexe dégénérée (2.1.1). Le premier résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit (X,ω) une variété kählérienne compacte de dimension n. Fixons un entier $1 \leq m \leq n$. Soit $F : X \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ une fonction vérifiant les conditions suivantes :*

(F1) pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto F(x,t)$ est croissante et continue,
(F2) pour chaque $t \in \mathbb{R}$ fixé, il existe $p > n/m$ tel que la fonction $x \mapsto F(x,t)$ appartient à $L^p(X)$,
(F3) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X F(.,t_0)\omega^n = \int_X \omega^n$.
Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$, unique à une constante additive près, telle que

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = F(x,\varphi)\omega^n.$$

De plus, si $\forall x \in X,\ t \mapsto F(x,t)$ est strictement croissante, alors la solution est unique.

Remarquons que la condition (F3) est immédiate si $F(.,-\infty) = 0$ et $F(.,+\infty) = +\infty$. Un cas particulier important est la fonction exponentielle $F(x,t) = f(x)e^t$.

Ce résultat est une généralisation de celui de [DK11]. Le point clé dans leur preuve est une estimée volume-capacité.

Comme application de la théorie du potentiel que l'on a développé, on considère un cas particulier : les variétés compactes kählériennes homogènes. Supposons que (X,ω) est une variété kählérienne compacte satisfaisant aux conditions suivantes :

(H1) $X = G/H$ où G est un groupe de Lie complexe et $H \subset G$ est un sous groupe fermé.

(H2) Il existe un sous groupe compact $K \subset G$ qui agit transitivement sur X.

(H3) ω est invariante par K.

Dans ce contexte on peut régulariser une fonction (ω,m)-sh par une suite de fonctions (ω,m)-sh lisses en prenant la moyenne par la mesure de Haar de K. C'est la même construction que dans [G99] et [Hu94]. Par le même raisonnement comme dans [EGZ09] on obtient le résultat de régularité suivant :

Théorème 2.1.2. *Soit (X,ω) une variété compacte kählérienne vérifiant (H1), (H2), (H3) et supposons que F satisfait aux conditions (F1), (F2) et (F3) du théorème 2.1.1. Alors l'unique solution de (2.1.1) est continue Höldérienne d'exposant γ pour tout $0 < \gamma < \frac{2(mp-n)}{mnp+2mp-2n}$.*

Remarque 2.1.3. Quand $m = n$ on obtient le même exposant γ que dans [EGZ09].

2.2 Préliminaires

2.2.1 Fonctions ω-sousharmoniques

Dans ce paragraphe, $\Omega \subset X$ est un ouvert contenu dans une carte locale de X.

Définition 2.2.1. Une fonction $u \in L^1(\Omega)$ est dite faiblement ω-sousharmonique (ou ω-sh) sur Ω si

$$dd^c u \wedge \omega^{n-1} \geq 0,$$

au sens faible des courants.

D'après Littman [Lit63] les fonctions ω-sh ont la propriété d'approximation suivante.

Proposition 2.2.2. *Soit u une fonction faiblement ω-sh dans Ω. Il existe une famille à un paramètre de fonctions $(u_h)_{h>0}$ ayant les propriétés suivantes : pour tout compact $\Omega' \subset \Omega$,*

a) u_h est lisse dans Ω' si h est suffisamment grand,

b) $dd^c u_h \wedge \omega^{n-1} \geq 0$ dans Ω',

c) u_h est décroissante avec h croissant et $\lim_{h\to\infty} u_h(x) = u(x)$ presque partout dans Ω',

d) u_h est donnée explicitement par

$$u_h(y) = \int_\Omega K_h(x,y)u(x)dx,$$

où K_h est une fonction lisse positive et

$$\int_\Omega K_h(x,y)dy \to 1,$$

uniformément en $x \in \Omega'$ lorsque $h \to +\infty$.

Définition 2.2.3. Une fonction u est dite ω-sh si elle est faiblement ω-sh et pour chaque $\Omega' \Subset \Omega$, $\lim_{h\to\infty} u_h(x) = u(x), \forall x \in \Omega'$, où u_h est construit comme dans la proposition 2.2.2.

Remarque 2.2.4. Toute fonction continue, faiblement ω-sh est ω-sh.

Si (u_j) est une suite de fonctions continues ω-sh qui décroît vers une fonction u qui n'est pas identiquement $-\infty$, alors u est ω-sh.

Si u est faiblement ω-sh alors la limite $\lim_{h\to+\infty}(u_h)$ est une fonction ω-sh qui coincide presque partout sur X avec u.

Soit (u_j) une suite de fonctions ω-sh et supposons que (u_j) est uniformément majorée. Alors $u := (\limsup_j u_j)^*$ est ω-sh. Ici, pour une fonction v, on emploie $v^\star$ pour désigner la régularisation semi-continue supérieurement de v.

Le lemme suivant de type lemme de Hartogs se démontre de la même façon que dans le cas classique.

Lemme 2.2.5. *Soit $(u_t)_{t>0}$ une famille de fonctions ω-sh dans Ω et uniformément bornée dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Supposons que un compact donné $K \subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ telle que $v(x) = [\limsup_{t\to+\infty} u_t(x)]^* \leq C$ sur K. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe T_ϵ tel que $u_t(x) \leq C + \epsilon$ pour tout $t \geq T_\epsilon$ et tout $x \in K$.*

2.2.2 Fonctions (ω, m)-sousharmoniques

Définition 2.2.6. Soit α une $(1,1)$-forme réelle sur X. On dit que α est (ω, m)-positive au point $P \in X$ si en ce point,

$$\alpha^k \wedge \omega^{n-k} \geq 0, \quad \forall k = 1, ..., m.$$

On dit que α is (ω, m)-positive (sur X) si elle l'est en tout point de X.

Remarque 2.2.7. Localement en $P \in X$ avec les cordonnées locales $z_1, ..., z_n$, on a

$$\alpha = \frac{i}{\pi}\sum_{j,k}\alpha_{j\bar{k}}dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

et

$$\omega = \frac{i}{\pi}\sum_{j,k}g_{j\bar{k}}dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Alors α est (ω, m)-positive en P i si et seulement si les valeurs propres $\lambda(g^{-1}\alpha) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de la matrice $\alpha_{j\bar{k}}(P)$ par rapport à la matrice $g_{j\bar{k}}(P)$ appartiennent à Γ_m. On vérifie facilement que ces valeurs propres ne dépendent pas du choix des cordonnées locales.

On peut montrer facilement la propriété suivante :

Proposition 2.2.8. *Une (1,1)-forme réelle α est (ω, m)-positive si et seulement si*

$$\alpha \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_{m-1} \wedge \omega^{n-m} \geq 0,$$

pour tous (1,1)-formes (ω, m)-positive $\beta_1, ..., \beta_{m-1}$.

Définition 2.2.9. Un courant T de bidegré (p,p) $(p \geq n-m)$ est dit (ω, m)-positif si

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{n-p} \wedge T \geq 0,$$

pour tous (1,1)-formes (ω, m)-positives $\alpha_1, .., \alpha_{n-p}$.

Suivant Blocki [Bl05] on peut définir la notion de (ω, m)-sousharmonicité pour les fonctions singulières.

Définition 2.2.10. Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite (ω, m)-sousharmonique (ou (ω, m)-sh) si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) Dans chaque carte locale Ω, étant donné ρ un potentiel local de ω, la fonction $u := \rho + \varphi$ est ω-sousharmonique sur Ω,

(ii) Pour toutes (1,1)-formes (ω, m)-positives $\beta_1, ..., \beta_{m-1}$ on a, au sens faible des mesures,

$$(\omega + dd^c\varphi) \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_{m-1} \wedge \omega^{n-m} \geq 0.$$

On note $\mathcal{SH}_m(X, \omega)$ l'ensemble de tous fonctions (ω, m)-sh sur X. Observons que, par définition, toute $\varphi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$ est semi-continue supérieurement.

Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer.

Proposition 2.2.11. *(i) Une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur X est (ω, m)-sh si et seulement si la forme $(\omega + dd^c\varphi)$ est (ω, m)-positive, ou de façon équivalente*

$$(\omega + dd^c\varphi) \wedge (\omega + dd^c u_1) \wedge ... \wedge (\omega + dd^c u_{m-1}) \wedge \omega^{n-m} \geq 0,$$

pour tous fonctions (ω, m)-sh de classe $\mathcal{C}^2$ $u_1, ..., u_{m-1}$.

(ii) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$ alors $\max(\varphi, \psi) \in SH_m(X, \omega)$.

(ii) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$.

(iii) Si $(\varphi_j) \subset \mathcal{SH}_m(X, \omega)$ est uniformément majorée alors $(\limsup_j \varphi_j)^* \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$.

Grâce au lemme de Hartogs 2.2.5, la proposition suivante peut être démontrée de la même façon que le cas des fonctions ω-plurisousharmoniques (voir [GZ05]).

Proposition 2.2.12. *Soit (φ_j) une suite de fonctions dans $\mathcal{SH}_m(X, \omega)$.*

(i) Si (φ_j) est uniformément majorée sur X, Alors soit φ_j converge uniformément vers $-\infty$ ou la suite (φ_j) est relativement compacte dans $L^1(X)$.

(ii) Si $\varphi_j \to \varphi$ dans $L^1(X)$ alors

$$\sup_X \varphi = \lim_j (\sup_X \varphi_j).$$

On déduit de la proposition 2.2.12 le résultat de compacité suivant

Lemme 2.2.13. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\varphi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega)$ vérifiant $\sup_X \varphi = 0$ on a*

$$\int_X \varphi \omega^n \geq -C.$$

Il s'en suit donc que

$$\mathcal{C} := \{\varphi \in \mathcal{SH}_m(X, \omega) \ / \ \sup_X \varphi \leq 0; \int_X \varphi \omega^n \geq -C\}$$

est un compact convexe de $L^1(X)$.

2.3 L'opérateur hessien complexe

Un des points clés dans la théorie du pluripotentiel est de savoir approximer une fonction quasi psh par une suite de fonctions quasi-psh lisses ([BK07], [De92]). Un tel résultat pour les fonctions (ω, m)-sh n'est pas connu. Pourcontourner cette difficulté, on va travailler dans une classe (à priori) restrictive définie à l'aide de la convergence quasi-uniforme par rapport à la capacité.

2.3.1 Capacité

Définition 2.3.1. Soit $E \subset X$ un sous-ensemble de Borel. On définit la (ω, m)-capacité intérieure de E par

$$\mathrm{cap}_{\omega,m}(E) := \sup\Big\{ \int_E \omega_\varphi^m \wedge \omega^{n-m} \ \ / \ \ \varphi \in SH_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X), 0 \leq \varphi \leq 1 \Big\}.$$

La (ω, m)-capacité extérieure d'un sous-ensemble $E \subset X$ est définie par

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(E) = \mathrm{cap}^*_{\omega,m}(E) := \inf\Big\{ \mathrm{cap}_{\omega,m}(U) \ \ / \ \ E \subset U, \ \ U \ \text{ est un sous-ensemble ouvert de X} \Big\}.$$

Si E est ouvert, il est évident que $\mathrm{cap}_{\omega,m}(E) = \mathrm{Cap}_{\omega,m}(E)$. Il résulte directement de la définition que $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ et $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ sont monotones croissantes et σ-sous-additives.

Observons que si $\varphi \in SH_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$, $0 \leq \varphi \leq M$ $(M > 1)$, alors pour tout ensemble de Borel $E \subset X$,

$$\int_E \omega_\varphi^m \wedge \omega^{n-m} \leq M^m \mathrm{cap}_{\omega,m}(E). \tag{2.3.1}$$

Définition 2.3.2. Une suite (φ_j) converge en $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ vers φ si pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{cap}_{\omega,m}(|\varphi_j - \varphi| > \delta) = 0.$$

On peut définir la convergence en $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ de la même façon. Cependant, on ne sait pas si ces deux notions coïncident.

Définition 2.3.3. Une suite de fonctions (φ_j) converge quasi-uniformément vers φ sur X (par rapport à $\mathrm{cap}_{\omega,m}$) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\mathrm{cap}_{\omega,m}(U) \leq \epsilon$ et φ_j converge uniformément vers φ dans $X \setminus U$.

Cette convergence est presque équivalente à la convergence en capacité comme le résultat suivant montre.

Proposition 2.3.4. *(i) Si φ_j converge quasi-uniformément vers φ, alors pour chaque $\delta > 0$,*

$$\lim_{j\to\infty} Cap_{\omega,m}(|\varphi_j - \varphi| > \delta) = 0.$$

(ii) Réciproquement, supposons que (φ_j) est une suite de fonctions et φ est une fonction telle que pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} Cap_{\omega,m}(|\varphi_j - \varphi| > \delta) = 0.$$

Alors il existe une sous suite (φ_{j_k}) convergeant quasi-uniformément vers φ sur X.

Démonstration. La première affirmation est évidente, il suffit de montrer la deuxième. On peut trouver une sous suite (notée encore (φ_j)) telle que

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(|\varphi_j - \varphi| > 1/j) \leq 2^{-j}, \ \forall j.$$

Pour chaque j, soit U_j un ouvert de X tel que $(|\varphi_j - \varphi| > 1/j) \subset U_j$ and $\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U_j) \leq 2^{-j+1}$. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $\cup_{j \geq k} U_j$ est un ouvert de $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ plus petite que ϵ et φ_j converge uniformément vers φ sur son complémentaire. $\square$

Définition 2.3.5. On note $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{SH}_m(X,\omega)$ telles qu'il existe une suite de fonctions (ω,m)-sh de classe $\mathcal{C}^2$, (φ_j) qui converge quasi-uniformément vers φ sur X. De façon équivalente, on peut remplacer la convergence quasi-uniforme par la convergence en $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ grâce à la proposition 2.3.4.

Proposition 2.3.6. *(i) Toute $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega)$ est quasi-continue, i.e. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $Cap_{\omega,m}(U) < \epsilon$ et tel que la restriction de φ à $X \setminus U$ est continue.*

(ii) Si $\varphi_j \downarrow \varphi$ dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ alors (φ_j) converge quasi-uniformément vers φ.

Démonstration. La première affirmation découle directement de la définition.

Montrons (ii). D'après (i) pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un ouvert U de $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ plus petite que ϵ tel que φ_j, φ sont continues sur $X \setminus U$ qui est compact. D'après le théorème de Dini, φ_j converge uniformément vers φ sur $X \setminus U$.

□

Remarque 2.3.7. 1. On a des inclusions évidentes

$$\mathcal{SH}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X) \subset \mathcal{P}_m(X,\omega) \subset \mathcal{SH}_m(X,\omega),$$

et

$$PSH(X,\omega) \subset \mathcal{P}_m(X,\omega).$$

2. En général, on ne sait pas si toute fonction (ω,m)-sh appartient à $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ même si elle est continue. Cependant, si (X,ω) est homogène (voir la remarque qui suit le théorème 2.5.1), on a

$$\mathcal{SH}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}(X) \subset \mathcal{P}_m(X,\omega).$$

Remarque 2.3.8. La convergence quasi-uniforme implique la convergence point par point en dehors d'un sous-ensemble de $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ zero. De plus, si (φ_j) est uniformément bornée et converge quasi-uniformément vers φ, alors on obtient la convergence dans L^p pour tout $p > 0$. En effet, pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque ouvert U comme dans la définition 2.3.3, on a

$$\begin{aligned}
\int_X |\varphi_j - \varphi|^p \omega^n &\leq \int_{X\setminus U} |\varphi_j - \varphi|^p \omega^n + \int_U |\varphi_j - \varphi|^p \omega^n \\
&\leq \int_{X\setminus U} |\varphi_j - \varphi|^p \omega^n + \sup_{X,j} |\varphi_j - \varphi|^p . \mathrm{cap}_{\omega,m}(U) \\
&\leq \int_{X\setminus U} |\varphi_j - \varphi|^p \omega^n + C\epsilon.
\end{aligned}$$

En prenant le limsup sur j et faisant $\epsilon \to 0$ on obtient

$$\limsup_j \|\varphi_j - \varphi\|_p = 0.$$

Lemme 2.3.9. *Si φ, ψ appartiennent à la classe $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ alors il en est de même de* $\max(\varphi,\psi)$.

Démonstration. Soient $(\varphi_j), (\psi_j)$ deux suites uniformément bornées de fonctions dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$ qui convergent quasi-uniformément vers φ, ψ respectivement. Posons

$$u := \max(\varphi,\psi);\ u_j := \max(\varphi_j,\psi_j);\ v_j := \frac{1}{j}\log(e^{j\varphi_j} + e^{j\psi_j}).$$

Alors pour chaque j, v_j appartient à $\mathcal{SH}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$. Pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un ouvert U de $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ plus petite que ϵ tel que φ_j, ψ_j converge uniformément sur $X \setminus U$ vers φ, ψ respectivement. Puisque $u_j \leq v_j \leq \log(2)/j + u_j$ et u_j converge uniformément vers u sur $X \setminus U$ on déduit que v_j converge uniformément vers u sur $X \setminus U$. □

2.3.2 Mesure hessienne

Dans ce paragraphe on définit la mesure hessienne complexe des fonctions dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega)$ qui peuvent être approximé en (en $\mathrm{cap}_{\omega,m}$) par les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega)$. En particulier, la mesure hessienne d'une fonction $u \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$ peut être définie au sens des courants suivant la méthode de Bedford et Taylor.

Théorème 2.3.10. *Soit $\varphi \in \mathcal{SH}_m(X,\omega)$ telle qu'il existe une suite uniformément bornée (φ_j) de fonctions (ω,m)-sh de classe $\mathcal{C}^2$ qui converge en $cap_{\omega,m}$ vers φ. Alors la suite de mesures*

$$H_m(\varphi_j) := (\omega + dd^c\varphi_j)^m \wedge \omega^{n-m}$$

converge (faiblement au sens des mesures) vers une mesure de Radon positive μ. De plus, μ ne dépend pas du choix de la suite d'approximation (φ_j). On définit alors la mesure hessienne de φ par $H_m(\varphi) := \mu$.

Démonstration. Puisque la suite de mesures $H_m(\varphi_j)$ est à masse uniformément bornée (par $\int_X \omega^n$), elles sont dans un ensemble faiblement compact. Il suffit donc de montrer que tous les points d'adhérence de cette suite sont les mêmes. Pour le faire, il nous reste à montrer que pour toute fonction test $\chi \in \mathcal{C}^\infty(X)$,

$$\lim_{j,k\to\infty} \int_X \chi[H_m(\varphi_j) - H_m(\varphi_k)] = 0.$$

Par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_X \chi[H_m(\varphi_j) - H_m(\varphi_k)] &= \int_X \chi dd^c(\varphi_j - \varphi_k) \wedge T \\ &= \int_X (\varphi_j - \varphi_k) dd^c\chi \wedge T, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

où

$$T = \sum_{l=0}^{m-1} (\omega + dd^c\varphi_j)^l \wedge (\omega + dd^c\varphi_k)^{m-1-l} \wedge \omega^{n-m}.$$

Fixons $\epsilon > 0$, et posons

$$U = U(j,k,\epsilon) = \{|\varphi_j - \varphi_k| > \epsilon\}.$$

On a

$$\mathrm{cap}_{\omega,m}(U) \le \mathrm{cap}_{\omega,m}(|\varphi_j - \varphi| \ge \frac{\epsilon}{2}) + \mathrm{cap}_{\omega,m}(|\varphi_k - \varphi| \ge \frac{\epsilon}{2}) \to 0,$$

quand $j,k \to +\infty$. Dans la suite on utilise C pour désigner une constante qui ne dépend pas de j,k,ϵ. On déduit de (2.3.2) et (2.3.1) que

$$\begin{aligned} \Big| \int_X \chi[H_m(\varphi_j) - H_m(\varphi_k)] \Big| &\le \int_U |\varphi_j - \varphi_k| C\omega \wedge T + \int_{X\setminus U} |\varphi_j - \varphi_k| C\omega \wedge T \\ &\le C\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) + C\epsilon \int_{X\setminus U} \omega \wedge T. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\limsup_{j,k\to\infty} \Big| \int_X \chi[H_m(\varphi_j) - H_m(\varphi_k)] \Big| \le C\epsilon.$$

Maintenant, il suffit de faire $\epsilon \downarrow 0$. Pour l'indépendance du choix de la suite, il est suffisant de répéter ce qu'on a fait ci-dessus. $\square$

Lemme 2.3.11. *Si $u \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$, il existe une suite de fonctions uniformément bornées dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$ qui converge quasi-uniformément vers u.*

Démonstration. Soit (u_j) une suite de fonctions dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega)\cap\mathcal{C}^2(X)$ qui converge quasi-uniformément vers u. Posons $M=\sup_X |u|$.
Comme u_j converge vers u en $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ elle converge, en particulier, vers u en $\mathrm{cap}_{\omega,m}$. Donc $u_j\to u$ dans $L^1(X)$. D'après le lemme 2.2.13 on a

$$\lim_{j\to+\infty}(\max_X u_j)=\max_X u.$$

Par conséquent, (u_j) est uniformément majorée.

Maintenant, posons

$$\varphi_j=\frac{1}{j}\log(e^{ju_j}+e^{-jM}).$$

C'est une suite de fonctions uniformḿent bornées dans $\mathcal{SH}_m(X,\omega)\cap\mathcal{C}^2(X)$ qui converge vers u quasi-uniformément. □

Lemme 2.3.12. *Soient $U\subset X$ un ouvert de X et φ une fonction bornée dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)$. Alors*

$$\int_U H_m(\varphi)\leq 2(\sup_X|\varphi|+1)\,Cap_{\omega,m}(U).$$

Démonstration. Soit φ_j une suite de fonctions (ω,m)-sh de classe $\mathcal{C}^2$ qui converge quasi-uniformément vers φ. On peut supposer que

$$-\sup_X|\varphi|-1\leq\varphi_j\leq\sup_X|\varphi|+1,\ \forall j.$$

Alors

$$\int_U H_m(\varphi)\leq\liminf_{j\to+\infty}\int_U H_m(\varphi_j)\leq 2(\sup_X|\varphi|+1)\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U).$$

□

Étant donnée $u\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ on peut définir la mesure hessienne $H_m(u)$ au sens des courants par la méthode de Bedford et Taylor.

Proposition-Définition 2.3.13. Soient $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$. Alors le courant

$$\omega_{\varphi_1}\wedge\omega_{\varphi_2}\wedge\omega^{n-m}$$

est bien défini, symétrique et (ω,m)-positif. On peut donc définir par récurrence la mesure hessienne de $\varphi\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ par

$$H_m(\varphi):=(\omega+dd^c\varphi)^m\wedge\omega^{n-m}.$$

De plus, cette définition coïncide avec la définition donnée par le théorème 2.3.10.

Démonstration. D'après la définition des fonctions (ω,m)-sousharmoniques, $T_1=(\omega+dd^c\varphi_1)\wedge\omega^{n-m}$ est un courant (ω,m)-positif. Si $\varphi_2\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$, $dd^c\varphi_2\wedge T_1$ est défini par

$$dd^c\varphi_2\wedge T_1=dd^c(\varphi_2T_1).$$

On note $T_2=\omega_{\varphi_1}\wedge\omega_{\varphi_2}\wedge\omega^{n-m}$. Comme φ_1,φ_2 appartiennent à $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$, il existe deux suites bornées $(\varphi_1^j),(\varphi_2^j)$ dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap\mathcal{C}^2(X)$ qui convergent quasi-uniformément vers φ_1,φ_2 respectivement. Montrons que la suite de courants $T_2^j=\omega_{\varphi_1^j}\wedge\omega_{\varphi_2^j}\wedge\omega^{n-m}$ converge vers T_2. Par conséquent T_2 est (ω,m)- positif et

$$\omega_{\varphi_1}\wedge\omega_{\varphi_2}\wedge\omega^{n-m}=\omega_{\varphi_2}\wedge\omega_{\varphi_1}\wedge\omega^{n-m}.$$

Choisissons une forme test χ et montrons la convergence suivante :

$$\lim_{j\to\infty}\int_X \chi\wedge dd^c(\varphi_2^j-\varphi_2)\wedge T_1 = 0. \tag{2.3.3}$$

On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_X \chi\wedge dd^c(\varphi_2^j-\varphi_2)\wedge T_1\Big| &= \Big|\int_X (\varphi_2^j-\varphi_2)dd^c\chi\wedge T_1\Big|\\ &\leq C\int_X |\varphi_2^j-\varphi_2|\omega_{\varphi_1}\wedge\omega^{n-1},\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de χ,ω. Maintenant, (2.3.3) se déduit de la dernière inégalité en appliquant le lemme 2.3.12 (pour $m=1$).

On peut montrer par récurrence que le courant

$$T_k=\omega_{\varphi_1}\wedge...\wedge\omega_{\varphi_k}\wedge\omega^{n-m}$$

est bien défini, symétrique, (ω,m)-positif, pour chaque $k\leq m$ et chaque $\varphi_i\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$. La mesure hessienne de $\varphi\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ est définie par

$$H_m(\varphi)=\omega_\varphi\wedge...\wedge\omega_\varphi\wedge\omega^{n-m}.$$

Étant donnée $\varphi\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$, il est facile de voir que la mesure hessienne de φ définie par la construction ci-dessus coïncide avec celle définie dans le théorème 2.3.10. $\square$

2.3.3 Quelques résultats de convergence

Dans ce paragraphe, on montre que l'opérateur hessien complexe est continue pour la convergence appropriée des suites de fonctions de la classe $\mathcal{P}_m(X,\omega)$. On en déduit un principe de comparaison pour les fonctions dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$. Les démonstrations sont analogues à celles pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Proposition 2.3.14. *Soient $(\varphi_j^1),...,(\varphi_j^m)$ des suites uniformément bornées dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ qui convergent quasi-uniformément vers $\varphi^1,...,\varphi^m$ respectivement. Soit (f_j) une suite uniformément bornée de fonctions quasi-continues qui converge quasi-uniformément vers f. Alors on a la convergence faible au sens des mesures*

$$f_j\omega_{\varphi_j^1}\wedge...\wedge\omega_{\varphi_j^m}\wedge\omega^{n-m}\rightharpoonup f\omega_{\varphi^1}\wedge...\wedge\omega_{\varphi^m}\wedge\omega^{n-m}.$$

Démonstration. Grâce au lemme 2.3.12 on peut faire comme dans [Kol05, Corollary 1.14]. $\square$

L'intégration par parties est permise dans $SH(X,\omega)\cap\mathcal{C}^2(X)$. D'après la proposition 2.3.14 elle est encore valide dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$.

Théorème 2.3.15 (Intégration par parties)**.** *Soient $\varphi,\psi\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ et T un courant de type*

$$T=\omega_{\varphi_1}\wedge...\wedge\omega_{\varphi_{m-1}}\wedge\omega^{n-m},$$

où $\varphi_i\in\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$. Alors

$$\int_X\varphi dd^c\psi\wedge T=\int_X\psi dd^c\varphi\wedge T.$$

Théorème 2.3.16 (Principe du maximum)**.** *Si φ,ψ sont deux fonctions dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)\cap L^\infty(X)$ alors*

$$\mathbb{1}_{\{\varphi>\psi\}}H_m(\max(\varphi,\psi))=\mathbb{1}_{\{\varphi>\psi\}}H_m(\varphi).$$

Démonstration. Soit φ_j une suite définissante de φ et posons

$$u_j := \max(\varphi_j - \psi, 0), \quad u := \max(\varphi - \psi, 0).$$

Comme $\{\varphi_j > \psi\}$ est ouvert pour chaque j, on a

$$\mathbb{1}_{\{\varphi_j>\psi\}} H_m(\max(\varphi_j, \psi)) = \mathbb{1}_{\{\varphi_j>\psi\}} H_m(\varphi_j),$$

donc

$$u_j H_m(\max(\varphi_j, \psi)) = u_j H_m(\varphi_j).$$

Il résulte de la proposition 2.3.14 que

$$uH_m(\max(\varphi, \psi)) = uH_m(\varphi).$$

Par conséquent, pour chaque $\epsilon > 0$ on a

$$\frac{u}{u+\epsilon} H_m(\max(\varphi, \psi)) = \frac{u}{u+\epsilon} H_m(\varphi).$$

Le résultat s'en suit en faisant $\epsilon \downarrow 0$. □

À partir du théorème 2.3.16, on obtient le principe de comparaison :

Corollaire 2.3.17 (Principe de comparaison)**.** *Si* $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_m(X, \omega) \cap L^\infty(X)$ *alors*

$$\int_{(\varphi>\psi)} H_m(\varphi) \leq \int_{(\varphi>\psi)} H_m(\psi).$$

Lemme 2.3.18. *Soient* φ, ψ *deux fonctions négatives dans* $\mathcal{P}_m(X, \omega) \cap L^\infty(X)$*. Alors pour tout* $s > 0$ *et* $0 < t \leq 1$*, on a*

$$t^m \mathit{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \psi < -t - s) \leq (1 + M)^m \int_{(\varphi-\psi<-s)} H_m(\varphi), \tag{2.3.4}$$

où $M = \|\psi\|_{L^\infty(X)}$.

Démonstration. Fixons $0 < t < 1$ et $s > 0$. Supposons d'abord que ψ est continue sur X. Alors $\{\varphi - \psi < -t - s\}$ est un ouvert. On suivra [EGZ09].

Soit u une fonction dans $\mathcal{P}_m(X, \omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$ telle que $0 \leq u \leq 1$. Posons $\delta = \frac{t}{M+1}$ et

$$\rho = \delta u + (1 - \delta)\psi - t - s.$$

Observons que

$$\{\varphi - \psi < -t - s\} \subset \{\varphi < \rho\} \subset \{\varphi - \psi < -s\}.$$

D'après le principe de comparaison, on a

$$\begin{aligned}
\delta^m \int_{(\varphi-\psi<-s-t)} H_m(u) &= \int_{(\varphi-\psi<-s-t)} (\delta\omega_u)^m \wedge \omega^{n-m} \\
&\leq \int_{(\varphi-\psi<-s-t)} (\delta\omega_u + (1-\delta)\omega_\psi)^m \wedge \omega^{n-m} \\
&\leq \int_{(\varphi<\rho)} \omega_\rho^m \wedge \omega^{n-m} \\
&\leq \int_{(\varphi<\rho)} \omega_\varphi^m \wedge \omega^{n-m} \\
&\leq \int_{(\varphi-\psi<-s)} \omega_\varphi^m \wedge \omega^{n-m}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\delta^m \int_{(\varphi-\psi<-s-t)} H_m(u) \leq \int_{(\varphi-\psi<-s)} \omega_\varphi^m \wedge \omega^{n-m}.$$

Maintenant, il suffit de prendre le supremum sur tous $u \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X)$.

Pour le cas général $\psi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$, on choisit une suite ψ_j uniformément bornée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ qui converge vers ψ quasi-uniformément. On peut supposer que

$$M_j := \|\psi_j\|_{L^\infty(X)} \to M.$$

Fixons $0 < \epsilon < s$ et U un ouvert de X tel que $\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) < \epsilon$ et tel que (ψ_j) converge uniformément vers ψ sur $X \setminus U$. Soit $N > 0$ un nombre naturel tel que $|\psi_j - \psi| < \epsilon$ pour tout $x \in X \setminus U$ et tout $j \geq N$. On fixe maintenant un $j > N$. Alors $\{|\psi_j - \psi| > \epsilon\} \subset U$. Observons que

$$\{\varphi - \psi < -t - s\} \subset \{\varphi - \psi_j < -t - s + \epsilon\} \cup \{\psi_j - \psi < -\epsilon\},$$

et que

$$\{\varphi - \psi_j < -s + \epsilon\} \subset \{\varphi - \psi < -s + 2\epsilon\} \cup \{\psi - \psi_j < -\epsilon\}.$$

Or, d'après le lemme 2.3.12, on a

$$\int_U H_m(\varphi) \leq 2(1 + \sup_X |\varphi|)\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) \leq 2\epsilon(1 + \sup_X |\varphi|).$$

Comme ψ_j est continue, d'après l'étape précédente,

$$\begin{aligned} t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \psi < -t - s) &\leq t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) + t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \psi_j < -t - s + \epsilon) \\ &\leq t^m \epsilon + (1 + M_j)^m \int_{\varphi-\psi_j<-s+\epsilon} H_m(\varphi) \\ &\leq t^m \epsilon + (1 + M_j)^m \int_{\varphi-\psi<-s+2\epsilon} H_m(\varphi) + \int_{\psi-\psi_j<-\epsilon} H_m(\varphi) \\ &\leq (t^m + 2(1 + \sup_X |\varphi|))\epsilon + (1 + M_j)^m \int_{\varphi-\psi<-s+2\epsilon} H_m(\varphi). \end{aligned}$$

En faisant $j \to +\infty$ et puis $\epsilon \to 0$ on obtient le résultat. □

Proposition 2.3.19 (Inégalité de Chern-Levine-Nirenberg)**.** *Soient T un courant de la forme $T = \omega_{u_1} \wedge ... \wedge \omega_{u_{m-1}} \wedge \omega^{n-m}$ avec $u_1, ..., u_{m-1} \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$, et φ, ψ deux fonctions dans $\mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$. Alors*

$$\int_X |\psi|\omega_\varphi \wedge T \leq \int_X |\psi| T \wedge \omega + \Big(2|\sup_X \psi| + \sup_X \varphi - \inf_X \varphi\Big) \int_X \omega^n. \tag{2.3.5}$$

Démonstration. On répète la preuve de [GZ05]. Supposons d'abord que $\sup_X \psi = 0 = \inf_X \varphi$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_X (-\psi)(\omega + dd^c\varphi) \wedge T &= \int_X (-\psi)\omega \wedge T + \int_X (-\psi) dd^c\varphi \wedge T \\ &= \int_X (-\psi)\omega \wedge T + \int_X (-\varphi) dd^c\psi \wedge T. \end{aligned}$$

Remarquons que $\int_X (-\varphi)(\omega + dd^c\psi) \wedge T \leq 0$ et que $\int_X \varphi\omega \wedge T \leq (\sup_X \varphi) \int_X \omega^n$. On obtient alors

$$\int_X (-\psi)(\omega + dd^c\varphi) \wedge T \leq \int_X (-\psi)\omega \wedge T + (\sup_X \varphi) \int_X \omega^n.$$

Pour le cas général on pose $\tilde{\psi} = \psi - \sup_X \psi$ et $\tilde{\varphi} = \varphi - \inf_X \varphi$. En appliquant l'inégalité ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X |\psi|(\omega + dd^c\varphi) \wedge T \wedge \omega &= \int_X |\tilde{\psi} + \sup_X \psi|(\omega + dd^c\tilde{\varphi}) \wedge T \\
&\leq |\sup_X \psi| \int_X \omega^n + \int_X (-\tilde{\psi})\omega \wedge T + (\sup_X \tilde{\varphi}) \int_X \omega^n \\
&\leq \int_X |\psi| T \wedge \omega + \Big(2|\sup_X \psi| + \sup_X \varphi - \inf_X \varphi\Big) \int_X \omega^n.
\end{aligned}$$

□

En appliquant (2.3.5) pour $T_i = \omega_\varphi^i \wedge \omega^{n-m+i}$, $i = m-1, ..., 0$ on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.3.20. *Soient φ, ψ deux fonctions dans $\mathcal{P}_m(X, \omega)$ et supposons que $0 \leq \varphi \leq 1$. Alors*

$$\int_X |\psi| H_m(\varphi) \leq \int_X |\psi| \omega^n + m\Big(2|\sup_X \psi| + 1\Big) \int_X \omega^n.$$

On déduit de 2.3.20 le résultat suivant.

Corollaire 2.3.21. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $\psi \in \mathcal{P}_m(X, \omega)$ normalisée par $\sup_X \psi = -1$ et pour tout $t > 0$,*

$$Cap_{\omega,m}(\psi < -t) \leq \frac{C}{t}.$$

On montre maintenant que la classe $\mathcal{P}_m(X, \omega)$ est stable pour les limites décroissantes.

Proposition 2.3.22. *Supposons que (φ_j) est une suite de fonctions dans $\mathcal{P}_m(X, \omega)$ qui décroit vers $\varphi \in L^\infty(X)$. Alors φ_j converge vers φ quasi-uniformément. En particulier, $\varphi \in \mathcal{P}_m(X, \omega)$.*

Démonstration. Il est clair que φ est (ω, m)-sh. Il suffit de montrer qu'il existe une sous suite de (φ_j) qui converge quasi-uniformément vers φ. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $j > k \in \mathbb{N}$, en appliquant le lemme 2.3.18 avec $\varphi = \varphi_j, \psi = \varphi_k, s = t$, on obtient

$$\begin{aligned}
t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi_j - \varphi_k < -2t) &\leq (1+M)^m \int_{(\varphi_j - \varphi_k < -t)} H_m(\varphi_j) \\
&\leq \frac{(1+M)^m}{t} \int_X (\varphi_k - \varphi_j) H_m(\varphi_j).
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Quitte à passer à une sous suite, on peut supposer que $H_m(\varphi_j) \rightharpoonup \mu$ au sens faible des mesures. Le lemme 2.3.23 ci-dessous s'applique pour donner

$$\lim_{j \to +\infty} \int_X \varphi_j H_m(\varphi_j) = \int_X \varphi d\mu.$$

Comme les fonctions $\varphi_j, j \in \mathbb{N}$ sont quasi continues, par la σ-sous-additivité de $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ on déduit que pour chaque $\epsilon > 0$ fixé, il existe un ouvert U tel que $\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) < \epsilon$ et il existe une suite $(\tilde{\varphi}_j)$ de fonctions continues sur X telle que pour tout j, $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j$ sur $X \setminus U$.
On a donc

$$\begin{aligned}
t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi_j - \tilde{\varphi}_k < -2t) &\leq t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi_j - \varphi_k < -2t) + t^m \epsilon \\
&\leq \frac{(1+M)^m}{t} \int_X (\varphi_k - \varphi_j) H_m(\varphi_j) + t^m \epsilon.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Observons que la $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ est continue pour les suites croissantes. Or, $\mathrm{Cap}_{\omega,m}$ et $\mathrm{cap}_{\omega,m}$ coïncident sur les ouverts. En passant à la limite lorsque $j \to +\infty$ dans (2.3.7), on obtient

$$t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \tilde{\varphi}_k < -2t) \leq \frac{(1+M)^m}{t} \int_X (\varphi_k - \varphi) d\mu + t^m \epsilon.$$

On en déduit que

$$t^m \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \varphi_k < -2t) \leq \frac{(1+M)^m}{t} \int_X (\varphi_k - \varphi) d\mu + 2t^m \epsilon,$$

et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi - \varphi_k < -2t) = 0.$$

Il résulte de la proposition 2.3.4 qu'il existe une sous suite de (φ_j) qui converge quasi-uniformément vers φ. □

Lemme 2.3.23. *Supposons que (φ_j) est une suite dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ qui décroit vers $\varphi \in L^\infty(X)$. Si $H_m(\varphi_j)$ converge faiblement au sens des mesures vers μ, alors*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_X \varphi_j H_m(\varphi_j) = \int_X \varphi d\mu.$$

Démonstration. On va montrer ce lemme par récurrence sur $m \geq 1$. Il est facile de voir que l'affirmation est vraie pour $m = 1$. Remarquons également que

$$\limsup_{j \to +\infty} \int_X \varphi_j H_m(\varphi_j) \leq \int_X \varphi d\mu.$$

Donc, il suffit de montrer que

$$\liminf_{j \to +\infty} \int_X \varphi_j H_m(\varphi_j) \geq \int_X \varphi d\mu.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $j > k$, on obtient par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_k [H_m(\varphi_k) - H_m(\varphi_j)] &= \int_X \varphi_k dd^c(\varphi_k - \varphi_j) \wedge T \wedge \omega^{n-m} \\ &= \int_X (\varphi_k - \varphi_j) dd^c \varphi_k \wedge T \wedge \omega^{n-m} \\ &\geq -\int_X (\varphi_k - \varphi_j) T \wedge \omega^{n-m+1}, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

où

$$T = \sum_{p=0}^{m-1} (\omega + dd^c \varphi_k)^p \wedge (\omega + dd^c \varphi_j)^{m-1-p}.$$

En posant $\psi_j = \frac{\varphi_j + \varphi_k}{2}$, on obtient

$$T \wedge \omega^{n-m+1} \leq 2^{m-1} (\omega + dd^c \psi_j)^{m-1} \wedge \omega^{n-m+1}.$$

Par conséquent, (2.3.8) nous donne

$$\int_X \varphi_k [H_m(\varphi_k) - H_m(\varphi_j)] \geq -2^m \int_X (\varphi_k - \psi_j) H_{m-1}(\psi_j) \tag{2.3.9}$$

Quitte à passer à une sous suite, on peut supposer que $H_{m-1}(\psi_j) \rightharpoonup \nu$ au sens faible des mesures. Par l'hypothèse de récurrence, en faisant $j \to +\infty$ dans (2.3.9) on obtient

$$\int_X \varphi_k[H_m(\varphi_k) - \mu] \geq -2^{m-1} \int_X (\varphi_k - \varphi) d\nu.$$

On en déduit que

$$\liminf_{j\to+\infty} \int_X \varphi_j H_m(\varphi_j) \geq \int_X \varphi d\mu,$$

d'où le résultat. □

2.4 Résultats de stabilité

Dans ce paragraphe, on utilise l'estimée de type volume-capacité [DK11] et on suit les arguments de [EGZ09] pour établir des résultats de stabilité. Utilisant les techniques de Blocki [Bl03] on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.4.1. *Soient $\varphi, \psi \in SH_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^2(X,\omega)$, $r \geq 2$, et posons $\rho = \varphi - \psi$. Alors*

$$\int_X |\rho|^{r-2} d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega^{n-1} \leq C\Big(\int_X |\rho|^{r-2}\rho(H_m(\psi) - H_m(\varphi))\Big)^{2^{1-m}},$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de n, m, r, $\int_X \omega^n$ et de $\|\varphi\|_{L^\infty(X)}$, $\|\psi\|_{L^\infty(X)}$.

Du théorème 2.4.1 et du corollaire 2.3.2 on déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.4.2. *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$, et posons $\rho = \varphi - \psi$. Alors*

$$\int_X d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega^{n-1} \leq C\Big(\int_X \rho(H_m(\psi) - H_m(\varphi))\Big)^{2^{1-m}},$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de n, m, et $\|\varphi\|_{L^\infty(X)}$, $\|\psi\|_{L^\infty(X)}$, et $\int_X \omega^n$.

La définition suivante se trouve dans [EGZ09]. On l'emploie ici pour adapter leur méthode.

Définition 2.4.3. Soient $\alpha > 0, A > 0$. Une mesure de Borel μ sur X satisfait la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$ si pour tout sous-ensemble de Borel K de X,

$$\mu(K) \leq A\mathrm{Cap}_{\omega,m}(K)^{1+\alpha}.$$

Proposition 2.4.4. *Soit μ une mesure Borel vérifiant la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$. Supposons que $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega)$ résout l'équation $H_m(\varphi) = \mu$, et $\sup_X \varphi = -1$. Alors il existe une constante $C = C(\alpha, A, \omega, n, m)$ telle que*

$$\sup_X |\varphi| \leq C.$$

Démonstration. Posons

$$f(s) := [\mathrm{Cap}_{\omega,m}(\varphi < -s)]^{1/m}.$$

Observons que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue à droite, décroissante et $\lim_{+\infty} f = 0$. Puisque μ satisfait la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$, On déduit du lemme 2.3.18 avec $\psi \equiv 0$ que f satisfait la condition dans [EGZ09, Lemma 2.4]. Or, d'après le corollaire 2.3.21,

$$f(s) \leq C_1 s^{-1/m},$$

pour une certaine constante C_1 qui ne dépend que de ω. Donc, en suivant la méthode de [EGZ09] (page 615), on obtient le résultat. □

Théorème 2.4.5. *Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap L^\infty(X)$ vérifiant*

$$\sup_X \varphi = \sup_X \psi = -1.$$

Supposons que ψ est bornée et que $H_m(\varphi)$ satisfait à la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$ pour certains $\alpha, A > 0$. Alors il existe $C = C(\alpha, A, \omega, \|\psi\|_{L^\infty(X)}) > 0$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sup_X(\psi - \varphi) \leq \epsilon + C[Cap_{\omega,m}(\varphi - \psi < -\epsilon)]^{\alpha/m}.$$

Démonstration. Elle se fait comme dans [EGZ09, Proposition 2.6]. □

La proposition suivante est dûe à Dinew et Kolodziej [DK11, Propsition 2.1]. On donne ici une preuve légèrement différente qui est en fait valable lorsque $\omega \geq 0$ et $\int_X \omega^n > 0$.

Proposition 2.4.6. *[DK11] Soit $1 < p < \frac{n}{n-m}$. Il existe une constante $A = A(p,\omega)$ telle que pour tout sous-ensemble Borel K de X,*

$$V(K) \leq ACap_{\omega,m}(K)^p,$$

où $V(K) := \int_K \omega^n$.

Démonstration. Fixons un ouvert U tel que $K \subset U$. Résolvons l'équation Monge-Ampère complexe pour trouver $u \in PSH(X,\omega)$, $\inf_X u = 0$ telle que $\omega_u^n = f\omega^n$ sur X, avec $f = V(U)^{-1}\chi_U$. D'après [BGZ08, Corollary 3.2], la solution u est continue et de plus, pour chaque $r > 1$,

$$\sup_X u \leq C\|f\|_r^{1/n},$$

où la constante $C = C(r,\omega) > 1$ ne dépend pas de K. L'inégalité entre les mesures Monge-Ampère mixtes [Di09] nous donne

$$\omega_u^m \wedge \omega^{n-m} \geq f^{m/n}\omega^n.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $V(U) < 1$. Alors $C\|f\|_r^{1/n} > 1$. La fonction u est limite uniforme d'une suite de fonctions ω-psh non négatives lisses (u_j). On peut supposer que $0 \leq u_j \leq C\|f\|_r^{1/n}$. En posant

$$v_j = \frac{u_j}{C\|f\|_r^{1/n}},$$

on obtient

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) \geq \int_U H_m(v_j) \geq (C\|f\|_r^{1/n})^{-m}\int_U H_m(u_j).$$

En passant à la limite on obtient

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(U) \geq (C\|f\|_r^{1/n})^{-m}\int_U H_m(u) \geq (C\|f\|_r^{1/n})^{-m}\int_U f^{m/n}\omega^n \geq C^{-m}V(U)^{1-\frac{m}{rn}}.$$

On a montré que pour tout $r > 1$, il existe une constante $A > 0$ qui ne dépend pas de K telle que

$$V(K) \leq A.\mathrm{Cap}_{\omega,m}(K)^{\frac{nr}{nr-m}},$$

Ce qui achève la preuve. □

Comme corollaire, on a des exemples de mesures vérifiant la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$.

Lemme 2.4.7. *Supposons que $\mu = f\omega^n$ est une mesure de Borel avec $0 \leq f \in L^p(X)$, $p > n/m$. Alors pour tout $0 < \alpha < \frac{mp-n}{(n-m)p}$, il existe $A_\alpha > 0$ telle que μ satisfait la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A_\alpha, \omega)$.*

le théorème de stabilité suivant a été établi dans [EGZ09] pour l'équation Monge-Ampère.

Théorème 2.4.8. *Supposons que* $H_m(\varphi) = f\omega^n$, $H_m(\psi) = g\omega^n$, *où* $\varphi, \psi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ *et* $f, g \in L^p(X)$ *avec* $p > n/m$. *Fixons* $r > 0$. *Alors si* $\gamma > 0$ *est tel que* $\frac{\gamma mq}{r-\gamma(r+mq)} < \frac{mp-n}{(n-m)p}$, *on a*

$$\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(X)} \leq C\|\varphi - \psi\|^{\gamma}_{L^r(X)},$$

où $q = \frac{p}{p-1}$ *désigne l'exposant conjugué de* p, *et la constante* C *ne dépend que de* n, m, p, r *et de* $\|f\|_p$, $\|g\|_p$.

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$, et $\alpha > 0$ à choisir ultérieurement. Il résulte du théorème 2.4.5 et de la proposition 2.4.4 que

$$\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(X)} \leq \epsilon + C_1[\mathrm{Cap}_{\omega,m}(|\varphi - \psi| > \epsilon)]^{\alpha/m}.$$

En appliquant le lemme 2.3.18 on voit que

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(|\varphi - \psi| > \epsilon) \leq \frac{C_2}{\epsilon^{m+r/q}} \int_X |\varphi - \psi|^{r/q}(f+g)\omega^n.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(|\varphi - \psi| > \epsilon) \leq \frac{C_3\|f+g\|_p}{\epsilon^{m+r/q}}\|\varphi - \psi\|^{r/q}_{L^r}.$$

Choisissons $\epsilon := \|\varphi - \psi\|^{\gamma}_{L^r}$. Alors

$$\mathrm{Cap}_{\omega,m}(|\varphi - \psi| > \epsilon) \leq C_4[\|\varphi - \psi\|_{L^r}]^{r/q-\gamma(m+r/q)}.$$

On en déduit que

$$\|\varphi - \psi\|_{L^\infty(X)} \leq \|\varphi - \psi\|^{\gamma}_{L^r(X)} + C_5\|\varphi - \psi\|^{\gamma'}_{L^r(X)},$$

où $\gamma' = \frac{\alpha}{m}[r/q - \gamma(m + r/q)]$. Finalement, on choisit α tel que $\gamma = \gamma'$: ce qui nous donne le résultat. □

2.5 Preuve des résultats principaux

2.5.1 Preuve du théorème 2.1.1

On montre tout d'abord l'unicité. Supposons que φ et ψ sont deux solutions continues de (2.1.1). Posons $\rho := \varphi - \psi$. D'après le corollaire 2.4.2 on a

$$\int_X d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega^{n-1} \leq C.\Big(\int_X \rho(H_m(\psi) - H_m(\varphi))\Big)^{2^{1-m}},$$

où C est une constante. Comme F est croissante en la deuxième variable, on a

$$0 \leq \int_X \rho(H_m(\psi) - H_m(\varphi)) = \int_X (\varphi - \psi)(F(.,\psi) - F(.,\varphi))\omega^n \leq 0.$$

Donc, d'après la formule de Stokes, on obtient

$$\int_X d\rho \wedge d^c\rho \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Ceci implique que ρ est constante. Si de plus, $t \mapsto F(x,t)$ est strictement croissante pour tout $x \in X$, on obtient $\rho = 0$.

Maintenant, on montre l'existence. On considère 3 cas.

Cas 1 : F ne dépend pas de la deuxième variable i.e. $\forall x \in X, t \in \mathbb{R}, F(x,t) = f(x)$ avec $f \in L^p(X)$ et $p > 1$.

Nous allons nous ramener par approximation au théorème fondamental de résolution de l'équation hessienne complexe non dégénérée (voir théorème 2.6.5 ci-dessous) puis appliquer les théorèmes de stabilité pour passer à la limite.

Prenons une suite de fonction lisses strictement positives (f_j) qui converge vers f dans $L^p(X)$. On peut supposer que $\int_X f_j\omega^n = \int_X \omega^n$, pour tout j. D'après le théorème 2.6.5 il existe une suite de fonctions lisses $(\omega, m)-$sousharmoniques (φ_j) normalisées par $\sup_X \varphi_j = 0, \forall j$ telle que

$$(\omega + dd^c\varphi_j)^m \wedge \omega^{n-m} = f_j\omega^n.$$

Quitte à passage à une sous suite, on peut supposer que (φ_j) converge dans $L^1(X)$. La suite $\|f_j\|_p$ étant uniformément bornée, d'après le lemme 2.4.7 on peut trouver α, A qui ne dépendent pas de j tels que tous les mesures $f_j\omega^n$ vérifient la condition $\mathcal{Q}_m(\alpha, A, \omega)$. D'après la proposition 2.4.4, la suite (φ_j) est uniformément bornée. D'après le théorème 2.4.8, (φ_j) converge uniformément vers une fonction continue $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega)$ qui résout l'équation $H_m(\varphi) = f\omega^n$ au sens faible.

Dans les deux cas suivants on va utiliser le théorème du point fixe de Schauder.

Cas 2 : Il existe $t_1 > t_0$ tel que $\int_X F(x,t_1)\omega^n > \int_X F(x,t_0)\omega^n$.

Posons

$$\mathcal{C} := \{\varphi \in SH_m(X,\omega) \ \ / \ \ \int_X \varphi\omega^n \geq -C_0; \ \sup_X \varphi \leq 0\},$$

où C_0 est la constante introduite dans le lemme 2.2.13. Il s'en suit que $\mathcal{C}$ est un compact convexe de $L^1(X)$.

Prenons $\psi \in \mathcal{C}$, d'après le cas 1 on peut trouver $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ telle que $\sup_X \varphi = 0$ et

$$H_m(\varphi) = F(., \psi + c_\psi)\omega^n,$$

où $c_\psi \geq t_0$ est une constante telle que

$$\int_X F(., \psi + c_\psi)\omega^n = \int_X \omega^n. \tag{2.5.1}$$

C'est parce que F satisfait les conditions (F2) et (F3). En effet, d'après le lemme de Fatou on a

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_X F(., \psi + t)\omega^n \geq \int_X F(., t_1)\omega^n > \int_X \omega^n.$$

Par ailleurs, $\int_X F(., \psi + t_0)\omega^n \leq \int_X F(., t_0) = \int_X \omega^n$. Donc, par continuité de $t \mapsto \int_X F(., \psi + t)\omega^n$ on peut trouver c_ψ vérifiant (2.5.1). Observons que φ est bien définie et ne dépend pas de c_ψ. En fait, supposons que c_1, c_2 sont deux constantes telles que

$$\int_X F(., \psi + c_1)\omega^n = \int_X F(., \psi + c_2)\omega^n = \int_X \omega^n,$$

et φ_1, φ_2 sont deux fonctions continues dans $\mathcal{P}_m(X,\omega)$ telles que

$$H_m(\varphi_1) = F(., \psi + c_1), \quad H_m(\varphi_2) = F(., \psi + c_2).$$

Puisque $t \mapsto F(x,t)$ est croissante pour tout $x \in X$, on a $F(., \psi + c_1) = F(., \psi + c_2)$ presque partout sur X. Par l'unicité montré ci-dessus on a $\varphi_1 = \varphi_2 + c$ pour certaine constante c qui devrai être 0 d'après la normalisation.

On peut donc définir l'application $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \ \psi \mapsto \varphi$.

Montrons que Φ est continue sur $\mathcal{C}$. Supposons que (ψ_j) est une suite dans $\mathcal{C}$ qui converge vers $\psi \in \mathcal{C}$ dans $L^1(X)$ et posons $\varphi_j = \Phi(\psi_j)$. On affirme que $c_j := c_{\psi_j}$ est uniformément bornée. Sinon, $c_j \uparrow +\infty$. Quitte à passage à une sous suite si nécessaire on peut supposer que $\psi_j \to \psi$ presque partout dans X. Alors d'après le lemme de Fatou on a

$$\int_X \omega^n = \lim_{j\to+\infty} \int_X F(.,\psi_j + c_j)\omega^n \geq \int_X F(.,t_1)\omega^n,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, la suite (c_j) est bornée. On en déduit que la suite $(F(.,\psi_j + c_j))_j$ est bornée dans $L^p(X)$, pour $p > n/m$. Pour la continuité de Φ il suffit de montrer que tout point d'adhérence de (φ_j) vérifie $\Phi(\psi) = \varphi$. Supposons que $\varphi_j \to \varphi$ dans $L^1(X)$. Il résulte du théorème 2.4.8 que la suite (φ_j) est Cauchy dans $\mathcal{C}^0(X)$. Donc, (φ_j) converge vers φ dans $\mathcal{C}^0(X)$ et $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\psi_j \to \psi$ presque partout sur X et $c_j \to c$. Puisque $t \mapsto F(x,t)$ est continue, $F(.,\psi_j + c_j) \to F(.,\psi + c)$ presque partout. Donc, $H_m(\varphi) = F(.,\psi + c)$ ce qui signifie que $\Phi(\psi) = \varphi$ et que Φ est continue sur $\mathcal{C}$.

D'après le théorème du point fixe de Schauder, Φ admet un point fixe $\varphi \in \mathcal{C}$. Par définition de Φ, la fonction φ appartient à $\mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ et on a

$$H_m(\varphi) = F(.,\varphi + c_\varphi)\omega^n.$$

La fonction $\varphi + c_\varphi$ est la solution cherchée.

Case 3 : Pour tout $t \geq t_0, \int_X F(.,t)\omega^n = \int_X F(.,t_0)\omega^n$. Dans ce cas, pour tout $t \geq t_0$, on a $F(x,t) = F(x,t_0)$ pour presque tout $x \in X$. Donc, pour tout $t \geq t_0$,

$$\|F(.,t_0)\|_{L^p(X)} = \|F(.,t)\|_{L^p(X)}.$$

D'après la proposition 2.4.4 on peut trouver constante positive C_1 telle que pour chaque $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ vérifiant $\sup_X \varphi = 0$ et

$$H_m(\varphi) = f\omega^n,$$

avec $\|f\|_p \leq \|F(.,t_0)\|_p$ on a

$$\varphi \geq -C_1.$$

Posons

$$\mathcal{C}' := \{\varphi \in SH_m(X,\omega) \ \ / \ -C_1 \leq \varphi \leq 0\}.$$

Alors $\mathcal{C}'$ est un compact convexe de $L^1(X)$.

Prenons $\psi \in \mathcal{C}'$, d'après le cas 1 on peut trouver $\varphi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ telle que $\sup_X \varphi = 0$ et

$$H_m(\varphi) = F(.,\psi + c_\psi)\omega^n,$$

où $t_0 \leq c_\psi \leq t_0 + C_1$ est une constante telle que

$$\int_X F(.,\psi + c_\psi)\omega^n = \int_X \omega^n.$$

C'est parce que F satisfait les conditions (F2) et (F3) . En fait,

$$\int_X F(.,\psi + t_0)\omega^n \leq \int_X \omega^n \leq \int_X F(.,\psi + t_0 + C_1)\omega^n.$$

Par continuité il existe c_ψ comme ci-dessus. Comme dans le cas 2, φ est bien-définie et ne dépend pas du choix de c_ψ. Par le choix de C_1, on voit que $\varphi \in \mathcal{C}'$. Donc, on peut définir une application $\Phi : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$ en posant $\Phi(\psi) = \varphi$.

Montrons que Φ est continue sur $\mathcal{C}'$. Supposons que (ψ_j) est une suite dans $\mathcal{C}'$ qui converge vers $\psi \in \mathcal{C}'$ dans $L^1(X)$ et posons $\varphi_j = \Phi(\psi_j)$, $c_j := c_{\psi_j}$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_X [F(., \psi_j + c_j)]^p \omega^n \leq \int_X [F(., c_j)]^p \omega^n = \int_X [F(., t_0)]^p \omega^n.$$

Par conséquence, la suite $(F(., \psi_j + c_j))_j$ est borné dans $L^p(X)$.

Comme dans le cas 2, on peut supposer que $\varphi_j \to \varphi$ dans $L^1(X)$. Il résulte du théorème 2.4.8 que (φ_j) est Cauchy dans $\mathcal{C}^0(X)$. Donc, (φ_j) converge dans $\mathcal{C}^0(X)$ vers φ qui devrai appartenir à $\mathcal{P}_m(X, \omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$. Quitte à passer à une sous suite on peut supposer que $\psi_j \to \psi$ dans $L^1(X)$ et $c_j \to c$. Alors $H_m(\varphi) = F(., \psi + c)$ et $\Phi(\psi) = \varphi$. Cela prouve que Ψ est continue dans $\mathcal{C}'$.

D'après le théorème du point fixe de Schauder, il s'en suit que Φ admet un point fixe dans $\mathcal{C}'$ que l'on note φ. Par définition de Φ, la fonction φ appartient à $\mathcal{P}_m(X, \omega) \cap \mathcal{C}^0(X)$ et on a

$$H_m(\varphi) = F(., \varphi + c_\varphi)\omega^n.$$

La fonction $\varphi + c_\varphi$ est la solution que l'on cherche.

2.5.2 Preuve du théorème 2.1.2

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème 2.1.2 en suivant [EGZ09]. Tout d'abord on régularise les fonctions (ω, m)-sh singulières. Soit φ une fonction continue (ω, m)-sh sur X. On considère la suite régularisante suivante

$$\varphi_\epsilon(x) = \varphi * \chi_\epsilon := \int_K \varphi(g^{-1}.x)\chi_\epsilon(g)dg, \tag{2.5.2}$$

où dg est la mesure de Haar sur K et χ_ϵ est un noyau lisse dont le support décroît vers $\{e\}$ (l'identité de K), et $\int_K \chi_\epsilon(g)dg = 1, \forall \epsilon > 0$.

Théorème 2.5.1. *Soit φ une fonction continue (ω, m)-sh sur X. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, φ_ϵ est (ω, m)-sh et lisse sur X et*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \varphi_\epsilon = \varphi$$

uniformément sur X.

Démonstration. La convergence uniforme est toujours vraie pour les fonctions continues.

Dans la suite, pour alléger la notation on va supprimer l'indice ϵ dans χ_ϵ. On va montrer que $\varphi * \chi$ est lisse et (ω, m)-sh.

Le fait que $\varphi * \chi$ soit lisse résulte de [Hu94] (voir aussi [G99]). Par commodité on rappelle ici la preuve. Considérons la fonction $\phi : K \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(h) = \int_K \varphi(g^{-1}.h.H)\chi(g)dg.$$

Puisque K agit transitivement sur X, on a un difféomorphisme naturel entre $K/(K \cap H)$ et $X = G/H$. Or $\phi = \varphi \circ \pi$, où π est la projection $\pi : K \to X$. Donc, il suffit de montrer que ϕ est lisse sur K. La mesure de Haar dg étant bi-invariante et invariante par $g \mapsto g^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\phi(h) = \int_K \varphi(g^{-1}.h.H)\chi(g)dg &= \int_K \varphi((g^{-1}.h).H)\chi(h.(g^{-1}.h)^{-1})dg \\ &= \int_K \varphi(g.H)\chi(h.g^{-1})dg.\end{aligned}$$

Par conséquence ϕ est lisse sur X.

Montrons que $\varphi * \chi$ est (ω, m)-sh. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$ des (1,1)-formes (ω, m)-positives fermées sur X, et notons $\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1}$. On désigne par $\mathcal{L}_g$ l'action à gauche de $g \in K$, i.e.

$$\mathcal{L}_g(x) = g.x, \quad x \in X.$$

Alors $\mathcal{L}_{g^{-1}}^* \alpha_j$ est (ω, m)-positive pour tout j, car $\mathcal{L}_g^* \omega = \omega$, et

$$\mathcal{L}_g^*(\mathcal{L}_{g^{-1}}^* \alpha^k \wedge \omega^{n-k}) = \alpha^k \wedge \omega^{n-k}.$$

Fixons une fonction test $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}^+)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_X \psi(\omega + dd^c\varphi * \chi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} &= \int_X \psi\alpha \wedge \omega^{n-m+1} + \int_X \varphi * \chi dd^c\psi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} \\
&= \int_X \psi\alpha \wedge \omega^{n-m+1} + \int_X \Big(\int_K \mathcal{L}_g^*\varphi\chi(g)dg\Big) dd^c\psi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} \\
&= \int_X \psi\alpha \wedge \omega^{n-m+1} + \int_K \Big(\int_X \mathcal{L}_g^*\varphi dd^c\psi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m}\Big)\chi(g)dg \\
&= \int_K \Big(\int_X \psi(\omega + dd^c\mathcal{L}_g^*\varphi) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m}\Big)\chi(g)dg \\
&= \int_K \Big(\int_X \psi(\omega + \mathcal{L}_g^* dd^c\varphi) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m}\Big)\chi(g)dg \\
&= \int_K \Big(\int_X \psi\mathcal{L}_g^*\big[(\omega + dd^c\varphi) \wedge \mathcal{L}_{g^{-1}}^*\alpha \wedge \omega^{n-m}\big]\Big)\chi(g)dg \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.5.2. Grâce au théorème 2.5.1, toute fonction continue (ω, m)-sh appartient à $\mathcal{P}_m(X, \omega)$.

Preuve du théorème 2.1.2. Fixons $0 < \gamma < \frac{2(mp-n)}{mnp+2mp-2n}$. Soit d une distance Riemannienne sur K. Soit φ l'unique solution continue de (2.1.1). Pour $h \in K$, on note $\varphi_h(x) := \varphi(h.x),\ x \in X$. Si u est lisse alors

$$\|u_h - u\|_{L^2}^2 \leq C.d^2(h, e) \int_X (-u) dd^c u \wedge \omega^{n-1},$$

où par C, on désigne une constante positive qui ne dépend pas de h. Donc, d'après le théorème 2.5.1,

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(X)} \leq C.d(h, e).$$

Pour $h \in K$ fixé, observons que φ_h est (ω, m)-sh et satisfait $H_m(\varphi_h) = F(h.x, \varphi(h.x))\omega^n$. En appliquant le théorème 2.4.8 avec $r = 2$ on obtient

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty} \leq C.\|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(X)}^\gamma.$$

Par conséquence,

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L^\infty(X)} \leq C.d(h, e)^\gamma, \ \forall h \in K. \tag{2.5.3}$$

Comme dans [EGZ09], cela nous donne la continuité γ-Höldérienne de φ.

2.6 Équation hessienne complexe non-dégénérée : estimée du gradient par réduction à un théorème de Liouville

Dans la section 2.5, on a utilisé le théorème fondamental de résolution de l'équation hessienne complexe non dégénérée. Dans cette section nous allons expliquer les principales étapes de la démonstration de ce théorème.

Soient (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n et $0 < f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ une fonction lisse vérifiant la condition de compatibilité

$$\int_X f\omega^n = \int_X \omega^n. \tag{2.6.1}$$

Fixons m un entier entre 1 et n. On cherche à résoudre l'équation suivante

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = f\omega^n. \tag{2.6.2}$$

Le cas $m = 1$ correspond à l'équation de Poisson qui est classique tandis que le cas $m = n$ correspond à l'équation de Monge-Ampère complexe qui a été résolue par Yau [Y78] en répondant positivement à la conjecture de Calabi.

Hou [H09] et Jbilou [Jb10] ont résolu indépendamment l'équation (2.6.2) sur des variétés à courbures bisectionnelles holomorphes nonnegatives. Cette hypothèse a servi seulement pour établir une estimée à priori du laplacien. En essayant de la supprimer, Hou-Ma-Wu [HMW10] ont démontré une estimée à priori très importante (sans hypothèse sur la courbure) qui dit que le laplacien est dominé par le carré de la norme du gradient :

Théorème 2.6.1. *[HMW10] Soit $\varphi \in \mathcal{C}^4(X)$ une solution de (2.6.2) normalisée par $\int_X \varphi\omega^n = 0$. Alors on a l'estimée à priori suivante*

$$\sup_X |dd^c\varphi|_\omega \le C(1 + \sup_X |\nabla\varphi|^2_\omega),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que d'une borne inférieure de la courbure holomorphe bisectionnelle de ω, et de $\|f^{1/m}\|_{\mathcal{C}^2(X)}$, ω, m, n.

Dans ce paragraphe on va utiliser un argument d'éclatement et l'estimée de Hou-Ma-Wu [HMW10] pour réduire le problème de la résolution de l'équation hessienne complexe non dégénérée (2.6.2) à la démonstration d'un théorème de Liouville pour les fonctions m-sousharmoniques maximales. Ce théorème de Liouville a été récemment prouvé par Dinew-Kolodziej [DK12], ce qui achève la résolution de (2.6.2) en toute généralité.

Théorème 2.6.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^4(X)$ une solution de (2.6.2) normalisée par $\int_X \varphi\omega^n = 0$. Alors on a l'estimée à priori suivante*

$$\sup_X |\nabla\varphi|_\omega \le C,$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que d'une borne inférieure de la courbure holomorphe bisectionnelle de ω, et de $\|f^{1/m}\|_{\mathcal{C}^2(X)}$, ω, m, n.

Le but de cette section est de réduire la preuve de ce théorème à celle d'un théorème de type Liouville pour les fonctions m-sh (voir théorème 2.6.3).

On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite de fonctions lisses $0 < f_j$ vérifiant $\|f_j^{1/m}\|_{\mathcal{C}^2(X)} \le C$ et une suite de fonctions $\varphi_j \in \mathcal{C}^4(X)$ normalisées par $\int_X \varphi_j\omega^n = 0$ telles que

$$(\omega + dd^c\varphi_j)^m \wedge \omega^{n-m} = f_j\omega^n, \quad \forall j, \tag{2.6.3}$$

et telle que $C_j := \sup_X |\nabla\varphi_j|_\omega \longrightarrow +\infty$.

Étape 1 : Usage d'un argument d'éclatement.
Pour chaque j soit $x_j \in X$ le point maximum de $|\nabla\varphi_j|_\omega$. La variété X étant compacte on peut supposer que $x_j \to a \in X$. Considérons une carte locale centrée en a (i.e $\psi : \Omega \to B(0,1)$, où Ω

est un voisinage ouvert de a et $B(0,1)$ est la boule d"unité dans $\mathbb{C}^n$ et $\psi(a)=0$) telle que dans $B(0,1)$ on a

$$(\psi^{-1})^*\omega(z) = \frac{i}{\pi}\sum_{j,k=1}^{n} \omega_{j\bar{k}}(z)dz_j\wedge d\bar{z}_k, \quad z=\psi(x), x\in\Omega$$

où $\omega_{j\bar{k}}(z)=\delta_{j\bar{k}}+O(|z|^2)$. Dans la suite, pour alléger les notation on identifie x dans Ω à son image par ψ dans $B(0,1)$. Considérons la suite de fonctions $\tilde{\varphi}_j$ définies par

$$\tilde{\varphi}_j(z) := \varphi_j(x_j + C_j^{-1}z),$$

où $z\in B_j := B(0,\frac{C_j}{2})$. Elles sont bien-définies pour j assez grand.

On affirme que la suite de fonctions $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j\geq k+2}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(B_k)$, pour chaque k fixé. En effet, on a

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_j}{\partial z_p\partial\bar{z}_q}(z) = C_j^{-2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z_p\partial\bar{z}_q}(x_j+C_j^{-1}z).$$

Il résulte du théorème 2.6.1 que $\|dd^c\tilde{\varphi}_j\|$ est uniformément bornée. D'après [CWu98, Theorem 4.2] la suite $(\tilde{\varphi}_j)_{j\geq k+2}$ est uniformément bornée dans l'espace de Sobolev $W^{2,p}(B_{k+1})$ pour chaque $p>1$. Donc, d'après le théorème de plongement de Sobolev (voir [Ad75, Theorem 6.2 III]), la suite $(\tilde{\varphi}_j)_{j\geq k+2}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(B_k)$ pour tout $\alpha\in(0,1)$, d'où l'affirmation.

On peut donc supposer que $\tilde{\varphi}_j$ converge vers u dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(B_k)$. Comme $C_j\to+\infty$, la fonction bornée u est, en fait, définie globalement sur $\mathbb{C}^n$ et vérifie

$$|\nabla u(0)|_\beta = 1.$$

Elle est donc non constante. En effet

$$\begin{aligned}|\nabla u(0)|^2_\beta &= \lim_{j\to\infty}\sum_{p,q}\frac{\partial\tilde{\varphi}_j(0)}{\partial z_p}\frac{\partial\tilde{\varphi}_j(0)}{\partial\bar{z}_q}\omega^{p\bar{q}}(x_j)\\ &= \lim_{j\to\infty}C_j^{-2}|\nabla\varphi_j|^2_\omega(x_j)=1.\end{aligned}$$

Étape 2 : Montrons que u est m-sousharmonique. Prenons un potentiel local $g: B(0,1)\to\mathbb{R}$ de ω, et définissons $g_j: B_j\to\mathbb{R}$ par

$$g_j(z) = g(x_j + C_j^{-1}z).$$

L'équation (2.6.3) lue dans $B(0,1)$ s'écrit

$$(dd^cg + dd^c\varphi_j)^m\wedge(dd^cg)^{n-m} = f_j(dd^cg)^n.$$

Par conséquent, pour chaque $z\in B_l$ on a

$$(dd^cg_j + dd^c\tilde{\varphi}_j)^m\wedge(C_j^2dd^cg_j)^{n-m}\mid_z = C_j^{-2m}f_j(dd^cg)^n\mid_{x_j+C_j^{-2}z}. \tag{2.6.4}$$

Fixons B_l et $\epsilon>0$. On a

$$C_j^2dd^cg_j\mid_z = dd^cg\mid_{x_j+C_j^{-1}z} = (1+O(|x_j+C_j^{-1}z|^2))\beta.$$

Pour chaque $1\leq k\leq m$ et chaque $z\in B_l$ on a

$$\begin{aligned}&(\epsilon\beta + dd^cg_j + dd^c\tilde{\varphi}_j)^k\wedge(C_j^2dd^cg_j)^{n-k}\\ =\ &\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(\epsilon\beta)^p\wedge(dd^cg_j+dd^c\tilde{\varphi}_j)^{k-p}\wedge(C_j^2dd^cg_j)^{n-k}\\ \geq\ &\epsilon^k\beta^k\wedge(1+O(|x_j+C_j^{-1}z|^2))^{n-k}\beta^{n-k}.\end{aligned}$$

Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $1 \leq k \leq m$ et $z \in B_l$ et $j \gg 0$,

$$(\epsilon\beta + dd^c g_j + dd^c \tilde{\varphi}_j)^k \wedge (C_j^2 dd^c g_j)^{n-k} \geq \delta\beta^n.$$

Maintenant, pour j suffisamment grand, puisque $dd^c\tilde{\varphi}_j$ est uniformément bornée on a

$$(\epsilon\beta + dd^c g_j + dd^c \tilde{\varphi}_j)^k \wedge \beta^{n-k} \geq \frac{\delta}{2}\beta^n, \ \forall 1 \leq k \leq m.$$

Pour cette raison, $\epsilon|z|^2 + g_j + \tilde{\varphi}_j$ est m-sousharmonique, si $j \gg 0$. En faisant $j \to +\infty$ on voit que $\epsilon|z|^2 + u$ est m-sousharmonique pour tout $\epsilon > 0$ donc u est m-sousharmonique.

Étape 3 : Montrons que $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ dans $\mathbb{C}^n$.
Fixons B_l et remarquons que $dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j)$ est uniformément bornée. On a

$$(\epsilon\beta + dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j))^m \wedge \beta^{n-m} = O(\epsilon)\beta^n + dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j)^m \wedge \beta^{n-m}.$$

Par ailleurs,

$$dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j)^m \wedge \beta^{n-m} \quad = \quad dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j)^m \wedge (C_j^2 dd^c g_j)^{n-m} + O(|x_j + C_j^{-1} z|^2)\beta^n$$

Il résulte de (2.6.4) que

$$\lim_{j\to\infty} dd^c(g_j + \tilde{\varphi}_j)^m \wedge \beta^{n-m} = 0.$$

Donc,

$$(dd^c(\epsilon|z|^2 + u))^m \wedge \beta^{n-m} = O(\epsilon)\beta^n,$$

au sens faible des mesures. En faisant $\epsilon \to 0$ et tenant en compte de la continuité de l'opérateur hessien complexe H_m on obtient $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$.

Conclusion : D'après les trois étapes précédentes il existe une fonction non constante $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions suivantes
(i) u est m-sousharmonique lipschitzienne globalement sur $\mathbb{C}^n$;
(ii) $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$;
(iii) $\sup_{\mathbb{C}^n} |u| < +\infty$;
(iv) $\sup_{\mathbb{C}^n} |\nabla u| < +\infty$.

Pour aboutir à une contradiction nous avons besoins du théorème de Liouville suivant.

Théorème 2.6.3. *[DK12] Toute fonction m-sousharmonique maximale, bornée et de gradient borné*[1] *dans $\mathbb{C}^n$ est constante.*

Remarque 2.6.4. Dans une première version de notre article *Smooth solutions to complex hessian equations, arXiv :1202.2435*, nous avons tenté de démontrer que u est constante sans l'hypothèse (iv) sur le gradient. Malheureusement notre preuve de cette version du théorème de Liouville contenait une erreur que nous n'avons pas pu rectifier. Cinq semaines plus tard, Dinew et Kolodziej [DK12] ont posté sur arXiv un papier dans le quel ils ont démontré le théorème de Liouville 2.6.3.

Par l'estimée $\mathcal{C}^1$ (théorème 2.6.2) et l'estimée de Hou-Ma-Wu (théorème 2.6.1) on obtient une estimée $\mathcal{C}^2$. Ainsi, le théorème de stabilité 2.4.5 donne une estimée $\mathcal{C}^0$ (en fait l'estimée $\mathcal{C}^0$ a été établie par Hou [H09] et Jbilou [Jb10] avec une constante dépendant de la norme uniforme du second membre). Par la méthode de continuité classique utilisée dans [Y78] ces estimées à priori et la théorie d'Evans-Krylov permettent de conclure à la résolution de l'équation hessienne complexe non-dégénérée sur les variétés kählériennes compactes :

Théorème 2.6.5. *[DK12] Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n. Fixons $1 \leq m \leq n$. Supposons que $0 < f$ est une fonction lisse sur X vérifiant la condition de compatibilité $\int_X f\omega^n = \int_X \omega^n$. Alors il existe une unique (à une constante additive près) fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que*

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} = f\omega^n.$$

1. cela signifie que la fonction est lipchitzienne globalement sur $\mathbb{C}^n$

2.7 Questions ouvertes

Dans ce paragraphe on va mentionner quelques problèmes ouverts. Nous avons tenté d'appliquer la méthode variationnelle à l'équation hessienne complexe pour résoudre $H_m(\varphi) = \mu$ avec μ assez singulière, en inspirant de [BBGZ09]. Les deux étapes importantes sont de savoir régulariser les fonctions (ω, m)-sh par une suite de fonctions lisses (ω, m)-sh qui converge convenablement (décroissante par exemple), et de savoir résoudre le problème de Dirichlet local.

Sur une variété kählérienne compacte homogène, le procédé de régularisation est donné par le théorème 2.5.1. Si la fonction à régulariser φ est continue, la convergence est uniforme. Cependant, si φ n'est pas continue, la convergence est-elle suffisamment bonne (pour définir l'opérateur hessien complexe) ?

Les deux problèmes suivants sont essentiels pour faire marcher la méthode variationnelle pour l'équation hessienne complexe sur une variété kählérienne compacte.

Problème 1 : *Soit φ une fonction (ω, m)-sh sur (X, ω) une variété kählérienne compacte. Existe-il une suite de fonctions (φ_j) lisses (ω, m)-sh qui converge vers φ. Quel est le type de convergence ? Si la variété est homogène, la convergence est-elle décroissante ?*

Si une telle suite de régularisation existe et si la convergence est suffisamment bonne (par exemple, convergence décroissante ou quasi-uniforme), on peut définir l'opérateur hessien complexe pour toute fonction (ω, m)-sh bornée et la classe $\mathcal{P}_m(X, \omega)$ est égale à $\mathcal{SH}_m(X, \omega)$.

Problème 2 : *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte. Soit Ω un petit ouvert de X qui est bi-holomorphe à une boule dans $\mathbb{C}^n$. On s'intéresse au problème de Dirichlet (dégénéré ou non-dégénéré) sur Ω. Étant donnée une fonction g lisse (ou continue) sur le bord $\partial\Omega$, et une mesure positive à densité lisse (ou continue) μ dans Ω, existe-il une fonction lisse φ (ω, m)-sh sur Ω qui est égale à g au bord et qui vérifie $H_m(\varphi) = \mu$?*

Peut-on résoudre ce problème dans le cas particulier où la variété est homogène ?

Chapitre 3

Une approche par la méthode de la viscosité

3.1 Introduction

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et m un entier tel que $1 \leq m \leq n$. On note β la forme kählérinne standard sur $\mathbb{C}^n$. Dans ce paragraphe on étudie le problème de Dirichlet pour l'équation hessienne complexe :

$$\begin{cases} -(dd^c\varphi)^m \wedge \beta^{n-m} + F(x,\varphi)\beta^n = 0 \text{ dans } \quad \Omega, \\ \varphi = g \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

au sens de la viscosité.

Ici les données vérifient les conditions suivantes :

$$g \in \mathcal{C}(\partial\Omega), \text{ et} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned} &F(x,t) \text{ est une fonction continue sur } \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ &\text{qui est croissante par rapport à la deuxième variable.} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

On dira que $F^{1/m}$ est γ-Höldérienne uniformément par rapport à t si

$$\sup_{|t|\leq M} \sup_{x\neq y\in\bar{\Omega}} \frac{|F^{1/m}(x,t) - F^{1/m}(y,t)|}{|x-y|^\gamma} < +\infty, \ \forall M > 0. \tag{3.1.4}$$

L'équation (3.1.1) écrite comme ci-dessus est une équation nonlinéaire du second ordre elliptique dégénérée au sens de la viscosité, si on se restreint précisément au cône des fonctions m-sousharmoniques sur Ω (voir [CIL92]). On peut donc utiliser les concepts de sous-solutions et sur-solutions et tenter de démontrer un théorème de comparaison pour le problème (3.1.1).

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Théorème 3.1.1. *Soient g, F deux données qui satisfont (3.1.2) et (3.1.3) respectivement. Supposons qu'il existe une sous-solution (de viscosité) bornée u et une sur-solution bornée v de (3.1.1) telles que $u_* = v^* = g$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une unique solution de viscosité de l'équation (3.1.1). Cette solution est également l'unique solution potentielle.*

Théorème 3.1.2. *Avec les même hypothèses que le théorème 3.1.1, supposons de plus que u, v sont γ-Höldériennes dans $\bar{\Omega}$ et F satisfait (3.1.4). Alors l'unique solution de l'équation (3.1.1) est aussi γ-Höldérienne dans $\bar{\Omega}$.*

On donnera un exemple où l'on pourra trouver une sous-solution et une sur-solution.

Théorème 3.1.3. *Supposons que $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ et F vérifie (3.1.3). Si Ω est strictement m-pseudoconvexe alors l'équation (3.1.1) admet une unique solution de viscosité. Si de plus, Ω est strictement pseudoconvexe, F vérifie (3.1.4) et $g \in \mathrm{Lip}_{2\gamma}(\bar{\Omega})$ alors l'unique solution appartient à $\mathrm{Lip}_{\gamma}(\bar{\Omega})$.*

Remarque 3.1.4. Quand $m = n$ on récupère les résultats de [YW10].

Ensuite, on étudie les solutions de viscosité sur les variétés hermitiennes compactes homogènes. Supposons que X est une variété Hermitienne compacte homogène munie d'une métrique hermitienne ω telles que les conditions suivantes sont vérifiées :
(H1) $X = G/H$ où G est un groupe de Lie complexe connexe et H un sous groupe fermé,
(H2) il existe un sous groupe compact $K \subset G$ qui agit transitivement sur X.
(H3) ω est invariante par K.
Par la méthode de la viscosité, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1.5. *Supposons que (X, ω) satisfait (H1), (H2) et (H3). Soit $F(x,t)$ une fonction continue, strictement croissante en t et supposons qu'il existe $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$F(x, t_0) \leq 1 \leq F(x, t_1), \ \forall x \in X. \tag{3.1.5}$$

Alors il existe une unique solution de viscosité de

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F(x, \varphi)\omega^n = 0.$$

Remarque 3.1.6. Dans la démonstration du théorème 3.1.5 on n'utilise pas les estimées à priori $\mathcal{C}^2$, contrairement au chapitre 2, où on emploie la méthode du potentiel et le résultat d'existence de Dinew-kolodziej [DK12]. De plus, on ne suppose pas que ω est fermée. En effet, un exemple de variété hermitienne compacte vérifiant (H1), (H2), (H3) qui n'est pas kählerienne nous a été communiqué par Karl Oeljeklaus que nous remercions (voir exemple 3.5.4).

3.2 Solutions de viscosité

Dans ce paragraphe on introduit la notion de (sous, sur) solutions de viscosité de l'équation (3.1.1). On les compare avec les solutions potentielles.

Définition 3.2.1. Soient $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $x_0 \in \Omega$. On dira que φ touche u par au-dessus (resp. par en-dessous) en x_0 si $\varphi(x_0) = u(x_0)$ et $\varphi(x) \geq u(x)$ (resp. $\varphi(x) \leq u(x)$) pour tout x dans un voisinage de x_0.

Définition 3.2.2. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi-continue supérieurement. On dit que φ est une sous-solution de viscosité de (3.1.1) si $\varphi \not\equiv -\infty$ et pour chaque $x_0 \in \Omega$ et chaque fonction q de classe $\mathcal{C}^2$ qui touche φ par au-dessus en x_0, on a

$$H_m(q) \geq F(x, q)\beta^n, \text{ en } x_0.$$

On dira que $H_m(\varphi) \geq F(x, \varphi)\beta^n$ "au sens de la viscosité".

Définition 3.2.3. Soit $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement . On dira que φ est une sur-solution de (3.1.1) si $\varphi \not\equiv +\infty$ et pour chaque $x_0 \in X$ et chaque fonction q de classe $\mathcal{C}^2$ qui touche φ au dessous en x_0, on a

$$[(dd^c q)^m \wedge \beta^{n-m}]_+ \leq F(x, q)\beta^n, \text{ at } x_0.$$

Ici $[\alpha^m \wedge \beta^{n-m}]_+$ désigne $\alpha^m \wedge \beta^{n-m}$ si α est m-positive et 0 autrement.

Remarque 3.2.4. Si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors $H_m(\varphi) \geq F(x, \varphi)\beta^n$ (ou $[H_m(\varphi)]_+ \leq F(x, \varphi)\beta^n$) est vraie au sens de la viscosité si et seulement si elle l'est au sens classique (ça veut dire que les dérivés secondes de u vérifient l'inégalité correspondante). En fait, si $H_m(\varphi) \geq F(x, \varphi)\beta^n$ au sens de la viscosité, on peut prendre φ comme une fonction test car elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Donc, l'inégalité vérifie au sens classique. Réciproquement, supposons que q touche φ par au-dessus en x_0. Alors la matrice hessienne $dd^c(q - \varphi)(x_0)$ est non-négative car x_0 est un point minimum local de $q - \varphi$. Comme $dd^c\varphi(x_0)$ est non-négative, on obtient $H_m(q)(x_0) \geq H_m(\varphi)(x_0)$.

Définition 3.2.5. Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution de (3.1.1) au sens de la viscosité si elle est à la fois sous et sur -solution. Elle est donc continue sur Ω.

La notion de sous-solution est évidemment stable en prenant le maximum. On montrera dans le lemme suivant qu'elle est stable pour les limites monotones.

Lemme 3.2.6. *Supposons que $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue. Soit (φ_j) une suite monotone de sous-solutions de viscosité de*

$$-(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + F(x, u)\beta^n = 0, \tag{3.2.1}$$

Si φ_j is uniformément majorée et $\varphi := (\lim \varphi_j)^* \not\equiv -\infty$ alors φ est une sous-solution de viscosité de (3.2.1).

Démonstration. On peut trouver une preuve dans [CIL92]. Pour plus de commodité, on la reproduit ici. Observons que si $z_j \to z$ alors

$$\limsup_{j \to +\infty} \varphi_j(z_j) \leq \varphi(z). \tag{3.2.2}$$

En fait, si (φ_j) est croissante, on a

$$\limsup_{j \to +\infty} \varphi_j(z_j) \leq \limsup_{j \to +\infty} \varphi(z_j) \leq \varphi(z).$$

Si (φ_j) est décroissante, on a pour chaque $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\limsup_{j \to +\infty} \varphi_j(z_j) \leq \limsup_{j \to +\infty} \varphi_k(z_j) \leq \varphi_k(z).$$

En faisant $k \to +\infty$ on obtient (3.2.2).

Fixons $x_0 \in \Omega$ et q une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de x_0, disons $B(x_0, r) \Subset \Omega$, qui touche φ par au-dessus en x_0. On peut choisir une suite (x_j) dans $B = \bar{B}(x_0, r/2)$ convergeant vers x_0 et une sous-suite de (φ_j) (noté encore φ_j) telles que

$$\lim_{j \to +\infty} \varphi_j(x_j) = \varphi(x_0). \tag{3.2.3}$$

En effet, pour montrer (3.2.3), d'après (3.2.2) il suffit de trouver une sous-suite telle que

$$\liminf_{j \to +\infty} \varphi_j(x_j) \geq \varphi(x_0).$$

Maintenant, si la suite (φ_j) est décroissante, on peut choisir $x_j = x_0, \forall j$. Si elle est croissante, on choisit (x_j) de sorte que $(\lim \varphi_j)(x_j) = \varphi(x_0)$. Donc, après passage à une sous-suite de (φ_j) on obtient (3.2.3).

Fixons $\epsilon > 0$. Pour chaque j, soit y_j le point où $\varphi_j - q - \epsilon|x - x_0|^2$ atteint son maximum sur B. Alors

$$\varphi_j(x_j) - q(x_j) - \epsilon|x_j - x_0|^2 \leq \varphi_j(y_j) - q(y_j) - \epsilon|y_j - x_0|^2. \tag{3.2.4}$$

On affirme que $y_j \to x_0$. En effet, supposons que $y_j \to y \in B$. En faisant $j \to +\infty$ dans (3.2.4) et en notant que $\limsup \varphi_j(y_j) \leq \varphi(y)$, on obtient

$$0 \leq \varphi(y) - q(y) - \epsilon|y - x_0|^2.$$

Puisque q touche φ par au-dessus dans B en x_0 et $y \in B$, l'inégalité ci-dessus entraîne que $y = x_0$, qui signifie que $y_j \to x_0$. Donc, encore par (3.2.4) on déduit que $\varphi_j(y_j) \to \varphi(x_0)$.

Pour j suffisamment grand, la fonction

$$q + \epsilon|x - x_0|^2 + \varphi_j(y_j) - q(y_j) - \epsilon|y_j - x_0|^2$$

touche φ_j par au-dessus en y_j. Par conséquent,

$$H_m(q + \epsilon|x - x_0|^2)(y_j) \geq F(y_j, \varphi_j(y_j))\beta^n.$$

Il suffit de faire $j \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$. □

Quand $F \equiv 0$, les sous-solutions de viscosité de (3.1.1) sont exactement les fonctions m-sousharmoniques.

Lemme 3.2.7. *Une fonction u est m-sousharmonique dans Ω si et seulement si*

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \tag{3.2.5}$$

au sens de la viscosité.

Démonstration. Soit u une fonction m-sousharmonique dans Ω et on note (u_ϵ) la suite régularisante lisse de u. Alors u_ϵ vérifie (3.2.5) au sens de la viscosité. Or, u_j décroit vers u. D'après le lemme 3.2.6, u vérifie (3.2.5) au sens de la viscosité.

Réciproquement, supposons que u vérifie (3.2.5) au sens de la viscosité. On fixe (m-1) formes m-positives $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$ à coefficients constantes telles que

$$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$$

est strictement positive. Soient $x_0 \in \Omega$ et $q \in \mathcal{C}^2(V_{x_0})$ tels que $u - q$ atteint son maximum local en x_0. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, $q + \epsilon|z - x_0|^2$ touche u par au-dessus en x_0. Par définition on a

$$(dd^c q + \epsilon\beta)^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0, \forall \epsilon > 0, \text{ en } x_0,$$

qui signifie que la forme $\dfrac{\partial^2 q}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0)$ est m-positive. Donc, en x_0 on a

$$L_\alpha q := dd^c q \wedge \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0.$$

Cela implique que $L_\alpha u \geq 0$ au sens de la viscosité. En coordonnées complexes appropriées cet opérateur différentiel à coefficients constants est l'opérateur Laplacien. Par conéquent, [Hör94] prop 3.2.10' p. 147 implique que u est L_α-sousharmonique donc appartient à $L^1_{\text{loc}}(V_{x_0})$ et satisfait $L_\alpha u \geq 0$ au sens des distributions. Puisque $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$ ont été choisies arbitrairement, par continuité on a

$$dd^c u \wedge \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0$$

au sens des distributions pour tous (1,1)-formes m-positives $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}$. Pour cette raison, u est m-sousharmonique. □

Corollaire 3.2.8. *Le lemme 3.2.6 est encore vrai même si la suite (φ_j) n'est pas monotone.*

Démonstration. Pour chaque j, posons

$$u_j = (\sup_{k\geq j} \varphi_k)^*, \quad v_l := \max(\varphi_j, ..., \varphi_{j+l}).$$

Comme la notion de sous-solution de viscosité est stable en prenant le maximum, on déduit que v_l est une sous-solution de viscosité de (3.2.1) pour chaque l. Observons que $u_j = (\sup_{l\geq 0} v_l)^*$ et que la suite (v_l) est monotone. Il résulte de ce qu'on a fait avant que u_j est une sous-solution de viscosité de (3.2.1). D'après le lemme 3.2.7 chaque φ_j est m-sousharmonique. Donc, $u_j \downarrow \varphi$, ce qui achève la preuve. □

Soit α une $(1,1)$-forme réelle. Par abuse de notation, on note

$$S_m(\alpha) := \frac{\alpha^m \wedge \beta^{n-m}}{\beta^n}.$$

Posons

$$U_m := \{\alpha \in \widetilde{\Gamma}_m \text{ à coefficients constantes telle que } S_m(\alpha) = 1\}.$$

Lemme 3.2.9. *Soit α une (1,1)-forme m-positive. Alors*

$$(S_m(\alpha))^{1/m} = \inf\Big\{\frac{\alpha\wedge\alpha_1\wedge ...\wedge\alpha_{m-1}\wedge\beta^{n-m}}{\beta^n} \ / \ \alpha_j \in U_m, \forall j\Big\}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Gårding [Ga59]. □

Proposition 3.2.10. *Soit φ une fonction semi-continue supérieurement dans Ω et $0 \leq f$ une fonction continue. Alors*

$$H_m(\varphi) \geq f\beta^n \tag{3.2.6}$$

est vraie au sens de la viscosité si et seulement si φ est m-sousharmonique et l'inégalité ci-dessus est vraie au sens potentiel.

Démonstration. On s'inspirera de [EGZ11].

Supposons que φ est m-sousharmonique et vérifie (3.2.6) au sens potentiel. Soient $x_0 \in \Omega$ et q une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui touche φ par au-dessus en x_0. Supposons que $H_m(q(x_0)) < f(x_0)\beta^n$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $H_m(q_\epsilon) < f\beta^n$ dans un petit voisinage de x_0 puisque f est continue, où $q_\epsilon = q + \epsilon|z - x_0|^2$. Le lemme 3.2.7 nous dit que q_ϵ est m-sousharmonique dans un petit voisinage de x_0, on le note B. Maintenant, pour chaque $\delta > 0$ suffisamment petit, $q_\epsilon - \delta \geq \varphi$ sur ∂B mais ce n'est pas le cas en x_0. Cela est en contradiction avec le principe de comparaison potentiel.

Pour démontrer la réciproque on procède en plusieurs étapes.

Étape 1 : Supposons que $0 < f^{1/m}$ **est lisse.** Soient $x_0 \in \Omega$ et q une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui touche φ par au-dessus en x_0. Fixons $\alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \in U_m$. On peut trouver $h \in \mathcal{C}^2(\{x_0\})$ telle que $L_\alpha h = f^{1/m}\beta^n$. Comme dans la preuve du lemme 3.2.7, on peut montrer que $\varphi - h$ est L_α-sousharmonique, cela nous donne $L_\alpha\varphi \geq L_\alpha h = f^{1/m}\beta^n$ au sens potentiel. On note φ_ϵ la régularisation de φ par convolution avec un noyau lisse. Alors

$$L_\alpha\varphi_\epsilon \geq (f^{1/m})_\epsilon\beta^n,$$

au sens potentiel et donc au sens habituel. D'après le lemme 3.2.9, on a

$$H_m(\varphi_\epsilon) \geq (f^{1/m})_\epsilon^m\beta^n.$$

En faisant $\epsilon \to 0$ et notant que l'opérateur hessien complexe est continue pour les limites décroissantes, on obtient

$$H_m(\varphi) \geq f\beta^n, \text{ au sens potentiel.}$$

Étape 2 : $0 < f$ est continue. Remarquons que $f = \sup\{h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ 0 < h \leq f\}$. D'après l'étape 1,

$$H_m(\varphi) \geq h\beta^n,$$

pour toute $0 < h \leq f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Cela nous donne $H_m(\varphi) \geq f\beta^n$ au sens du potentiel.

Étape 3 : $0 \leq f$ est continue. Considérons $\varphi_\epsilon = \varphi + \epsilon|z|^2$. Alors

$$H_m(\varphi_\epsilon) \geq (f + \epsilon^m)\beta^n$$

au sens de la viscosité. D'après l'étape 2, on a

$$H_m(\varphi_\epsilon) \geq (f + \epsilon^m)\beta^n$$

au sens potentiel. Il suffit maintenant de faire $\epsilon \downarrow 0$. □

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Considérons la sup-convolution et l'inf-convolution de u :

(3.2.7) $$u^\delta(x) := \sup\{u(y) - \frac{1}{\delta^2}|x - y|^2 \ /\ y \in \Omega\};\ u_\delta(x) := \inf\{u(y) - \frac{1}{\delta^2}|x - y|^2 \ /\ y \in \Omega\}.$$

Pour chaque $\delta > 0$, u^δ, u_δ sont continues dans Ω et $u^\delta \downarrow u^*$ et $u_\delta \uparrow u_*$.

Pour chaque $\delta > 0$ on note $\Omega_\delta := \{x \in \Omega \ /\ d(x, \partial\Omega) > A\delta\}$, où $A = \sqrt{\mathrm{osc}(u)}$.

Lemme 3.2.11. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une sous-solution bornée de $H_m(u) = f\beta^m$, où $0 \leq f$ est continue dans Ω. Alors $H_m(u^\delta) \geq f_\delta\beta^n$ au sens de la viscosité dans Ω_δ,, où $f_\delta(x) = \inf\{f(y) \ /\ |x - y| \leq A\delta\}$. De façon similaire, si u est une sur-solution bornée, on a $H_m(u_\delta) \leq f^\delta\beta^n$, où $f^\delta(x) = \sup\{f(y) \ /\ |x - y| \leq A\delta\}$.*

Démonstration. On montrera le résultat pour la sous-solution, l'autre s'en déduit de façon similaire. Soient $x_0 \in \Omega_\delta$ et q une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui touche u^ϵ en x_0. Puisque u est semi-continue supérieurement, il existe $y_0 \in \bar{B}(x_0, A\delta) \subset \Omega$ tel que

$$u^\epsilon(x_0) = u(y_0) - \frac{1}{\epsilon^2}|x_0 - y_0|^2.$$

Alors, la fonction $Q(x) = q(x - y_0 + x_0) + \frac{1}{\epsilon^2}|x_0 - y_0|^2$ touche u par au-dessus en y_0. D'où

$$H_m(Q)(y_0) \geq f(y_0)\beta^n.$$

En d'autres termes, $H_m(q)(x_0) \geq f_\epsilon(x_0)\beta^n$. □

Théorème 3.2.12. *Supposons que $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfait (3.1.3). Soit φ une fonction bornée semi-continue supérieurement dans Ω. Alors, l'inégalité*

(3.2.8) $$H_m(\varphi) \geq F(x, \varphi)\beta^n$$

est vraie au sens de la viscosité si et seulement si φ est m-sousharmonique dans Ω et (3.2.8) est vraie au sens potentiel.

Démonstration. Supposons que (3.2.8) est vraie au sens de la viscosité. Considérons la sup-convolution de φ :

$$\varphi^\delta(x) := \sup\{\varphi(y) - \frac{1}{\delta^2}|x - y|^2 \ /\ y \in \Omega\},\ x \in \Omega_\delta,$$

où $\Omega_\delta := \{x \in \Omega \ /\ d(x, \partial\Omega) > A\delta\}$, et la constante $A > 0$ est choisie telle que $A^2 > 2\mathrm{osc}_\Omega\varphi$. Alors $\varphi^\delta \downarrow \varphi$ et

(3.2.9) $$H_m(\varphi^\delta) \geq F_\delta(x, \varphi^\delta)\beta^n,\ \text{dans } \Omega_\delta,$$

au sens de la viscosité, où $F_\delta(x,t) = \inf_{|y-x|\leq A\delta} F(y,t)$.

D'après la proposition 3.2.10, l'inégalité (3.2.9) est vraie au sens potentiel et le résultat s'en déduit en faisant $\delta \downarrow 0$ par continuité de H_m pour les suites décroissantes.

Réciproquement, supposons que φ est m-sousharmonique et (3.2.8) est vraie au sens potentiel. D'après le théorème 1.3.16, il est clair que

$$H_m(\varphi^\delta) \geq F_\delta(x, \varphi^\delta)\beta^n, \tag{3.2.10}$$

au sens potentiel. En appliquant la proposition 3.2.10 avec φ^δ au lieu de φ, on voit que (3.2.10) est vraie au sens de la viscosité. Comme $\varphi^\delta \downarrow \varphi$ et H_m est continue pour les suites décroissantes, on a

$$H_m(\varphi^\delta) \rightharpoonup H_m(\varphi). \tag{3.2.11}$$

Pour chaque $\delta > 0$ fixé, on a $F_\delta(x, \varphi^\delta)(x) \geq F_\delta(x, \varphi(x), \forall x$. On déduit de (3.2.10) et (3.2.11) que

$$H_m(\varphi) \geq F_\delta(x, \varphi)\beta^n,$$

au sens potentiel. Le résultat s'en déduit en faisant $\delta \downarrow 0$. □

3.3 Principe de comparaison local

Dans ce paragraphe on s'inspirera de [YW10] (voir aussi [CC95]) pour démontrer le principe de comparaison de viscosité local.

Définition 3.3.1. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite semi-concave (resp. semi-convexe) s'il existe $K > 0$ (resp. $K < 0$) tel que pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe un polynôme quadratique $P = K|z|^2 + l$, où l est affine, qui touche u par au-dessus (resp. par au-dessous) en z_0.

Définition 3.3.2. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite deux fois ponctuellement différentiable en $z_0 \in \Omega$ s'il existe un polynôme quadratique q tel que

$$u(z) = q(z) + o(|z - z_0|^2) \text{ quand } z \to z_0.$$

Remarquons qu'un tel polynôme q est unique s'il existe. On définit alors $D^2u(z_0) := D^2q(z_0)$ et $dd^cu(z_0) := dd^cq(z_0)$.

On aura besoin du résultat suivant connu sous le nom de théorème d'Alexandroff-Buselman-Feller (voir [EG92, Theorem 1, Section 6.4], ou [Kr87, Theorem 1, Section 1.2], ou [Kr87, appendix 2]).

Théorème 3.3.3. *Toute fonction semi-convexe (resp. semi-concave) sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est deux fois ponctuellement différentiable presque partout sur cet ouvert.*

On énonce et démontre le principe de comparaison local.

Théorème 3.3.4. *Supposons que F satisfait (3.1.3). Soient u une sous-solution bornée et v une sur-solution bornée de viscosité de l'équation*

$$-H_m(\varphi) + F(x, \varphi)\beta^n = 0.$$

Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ alors $u \leq v$ dans Ω.

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $u < v$ près du bord de Ω. On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) - v(x_0) = a > 0$.

On note u^ϵ, v_ϵ la sup-convolution et l'inf-convolution définies par (3.2.7). Il est clair que u^ϵ est semi-convexe et u_ϵ est semi-concave. D'après le lemme de Dini, $w_\epsilon := v_\epsilon - u_\epsilon \geq 0$ près de $\partial\Omega$ si

$\epsilon > 0$ est suffisamment petit. Par conséquent, on peut trouver un ouvert $U \Subset \Omega$ tel que $w_\epsilon \geq 0$ sur $\Omega \setminus U$ pour tout ϵ petit.

Fixons un tel $\epsilon > 0$ et notons E_ϵ le sous-ensemble de U où les fonctions $w_\epsilon, u^\epsilon, v_\epsilon$ sont deux fois ponctuellement différentiables. La mesure de Lebesgue de $U \setminus E_\epsilon$ est 0 d'après le théorème 3.3.3. Fixons $r > 0$ tel que $\Omega \subset B_r \subset B_{2r}$. Définissons

$$G_\epsilon(x) = \sup\{\varphi(x) \ / \ \varphi \text{ est convexe dans } B_{2r},\ \varphi \leq \min(w_\epsilon, 0) \text{ dans } \Omega\}.$$

Comme $w_\epsilon \geq 0$ sur ∂U et $w_\epsilon(x_0) \leq a < 0$, d'après l'estimée d'Alexandroff-Bakelman-Pucci (ABP) (voir [CC95], YW10) on peut trouver $x_\epsilon \in E_\epsilon$ tel que

(i) $w_\epsilon(x_\epsilon) = G_\epsilon(x_\epsilon) < 0$,

(ii) G_ϵ est deux fois ponctuellement différentiable en x_ϵ et $\det_{\mathbb{R}}(D^2 G_\epsilon(x_\epsilon)) \geq \delta$, où $\delta > 0$ ne dépend que de a, n et $\operatorname{diam}(\Omega)$.

Puisque G_ϵ est convexe, on a également que $\det_{\mathbb{C}}(dd^c G_\epsilon)(x_\epsilon) \geq \delta^{1/2}$. D'après l'inégalité de Gårding's [Ga59] on a

$$(dd^c G_\epsilon)^m \wedge \beta^{n-m}(x_\epsilon) \geq \delta_1 \beta^n,$$

où δ_1 ne dépend pas de ϵ. Par ailleurs,

$$H_m(u^\epsilon)(x_\epsilon) \geq F_\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon))\beta^n,$$

Or, $G_\epsilon + u^\epsilon$ touche v_ϵ par en-dessous en x_ϵ. Puisque $G_\epsilon + u^\epsilon$ est m-sousharmonique et deux fois ponctuellement différentiable en x_ϵ, on a

$$H_m(G_\epsilon + u^\epsilon)(x_\epsilon) \leq F^\epsilon(x_\epsilon, v_\epsilon(x_\epsilon))\beta^n.$$

Comme $F(x,t)$ est croissante en t et $w_\epsilon(x_\epsilon) < 0$, les inégalités ci-dessus impliquent que

$$\delta_2 + F_\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon)) \leq F^\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon)).$$

Quitte à extraire une sous suite, en faisant $\epsilon \to 0$ on obtient une contradiction. $\square$

3.4 Cas des variétés homogènes

Dans ce paragraphe, on étudie solutions de viscosité de l'équation

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F(x,\varphi)\omega^n = 0, \tag{3.4.1}$$

où (X, ω) satisfait aux conditions (H1), (H2), (H3) ; et $F(x,t)$ est une fonction continue sur $X \times \mathbb{R}$.

3.4.1 Solutions de viscosité vs solutions potentielles

On définit les sous-solutions et sur-solutions de viscosité de façon similaire que dans le cas local. On les compare avec les (sous, sur) solutions potentielles dans les deux résultats suivants.

Proposition 3.4.1. *Supposons que ω est kähler et φ est une fonction continue sur X. Alors, φ est (ω, m)-sh si et seulement si*

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} \geq 0 \tag{3.4.2}$$

au sens de la viscosité.

Démonstration. Supposons que φ est (ω, m)-sh. Soit φ_ϵ la suite régularisante de φ définie par (2.5.2) . Alors φ_ϵ est lisse et (ω, m)-sh sur X. Elle satisfait donc à l'inégalité différentielle

$$(\omega + dd^c\varphi_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \geq 0$$

au sens classique sur X et donc au sens de la viscosité. La même preuve que celle du lemme 3.2.6 nous donne que (3.4.2) est également satisfaite au sens de la viscosité. Ici, la situation est plus facile car la convergence est uniforme.

Supposons maintenant que φ satisfait (3.4.2) au sens de la viscosité. Fixons $\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1}$, où α_i sont des (1,1)-formes (ω, m)-positives fermées. D'après l'inégalité de Gårding,

$$(\omega + dd^c\varphi) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} \geq 0$$

au sens de la viscosité. Grâce à [HKM93, Corollary 7.20] les mêmes arguments que dans [Hör94, page 147] montrent que l'inégalité ci-dessus est vraie au sens faible des courants. Donc, φ est (ω, m)-sh. □

Théorème 3.4.2. *Supposons que ω est kähler, $F(x,t)$ est une fonction continue, et $\varphi \in \mathcal{C}(X)$. Alors, φ est (ω, m)-sh et satisfait*

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} \geq F(x, \varphi)\omega^n \tag{3.4.3}$$

au sens potentiel ssi l'inégalité ci-dessus est vraie au sens de la viscosité.

Démonstration. Posons

$$f(x) = F(x, \varphi(x)), \; x \in X.$$

Supposons que φ satisfait (3.4.3) au sens potentiel. Soient $x_0 \in X$ et $q \in \mathcal{C}^2(U)$ qui touche φ par au-dessus en x_0 dans U, un petit voisinage de x_0. Supposons par l'absurde que

$$(\omega + dd^c q)^m \wedge \omega^{n-m} < f\omega^n$$

en x_0. Alors pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit,

$$(\omega + dd^c q_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} < f\omega^n$$

dans une petite boule B contenant x_0. Ici, $q_\epsilon = q + \epsilon|x - x_0|^2$ est définie dans une carte locale centrée en x_0. Puisque q touche φ par au-dessus en x_0 dans B, on peut trouver $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $q_\epsilon - \delta \geq \varphi$ sur ∂B. Cependant $q_\epsilon(x_0) - \delta < \varphi(x_0)$ contredit le principe de comparaison potentiel. En fait, on peut appliquer le corollaire 1.3.14 avec $\beta = \omega$ et $\Omega = B$ car φ est continue et sa mesure de hessienne est bien définie et de plus $q_\epsilon - \delta$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Maintenant, supposons que φ satisfait (3.4.3) au sens de la viscosité. D'après la proposition 3.4.1, φ est (ω, m)-sh.

On considère deux cas.

Cas 1 : F ne dépend pas de la deuxième variable. On note $f(x) = F(x, 0)$ pour $x \in X$.

Supposons tout d'abord que $f > 0$.

Fixons $\tilde{f}$ une fonction lisse strictement positive sur X et $\tilde{f} \leq f$. Alors φ vérifie

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} \geq \tilde{f}\omega^n$$

au sens de la viscosié. Fixons $\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{m-1}$, où α_i sont des (1,1)-forms lisses strictement (ω, m)-positives fermées. Posons

$$\alpha_j^m \wedge \omega^{n-m} = h_j\omega^n, \quad j = 1...m-1.$$

D'après l'inégalité de Gårding's on voit que

$$(\omega + dd^c\varphi) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} \geq h_1^{1/m} ... h_{m-1}^{1/m} \tilde{f}^{1/m}\omega^n, \tag{3.4.4}$$

au sens de la viscosité. Comme dans la preuve de la proposition 3.4.1 l'inégalité ci-dessus est vraie au sens potentiel. Soit φ_ϵ la suite régularisante de φ définie par (2.5.2). On affirme que

$$(\omega + dd^c\varphi_\epsilon) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} \geq h_1^{1/m} ... h_{m-1}^{1/m} (\tilde{f}^{1/m})_\epsilon \omega^n,$$

au sens classique i.e. ponctuellement sur X. En effet, d'après (3.4.4)), on a

$$\begin{aligned}
(\omega + dd^c\varphi_\epsilon) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-m} &= \int_K \mathcal{L}_g^* \Big((\omega + dd^c\varphi) \wedge \mathcal{L}_{g^{-1}}^* \alpha \wedge \omega^{n-m} \Big) \chi_\epsilon(g) dg \\
&\geq \int_K \mathcal{L}_g^* \Big(\mathcal{L}_{g^{-1}}^* (h_1^{1/m} ... h_{m-1}^{1/m}) \tilde{f}^{1/m} \Big) \chi_\epsilon(g) dg \\
&= h_1^{1/m} ... h_{m-1}^{1/m} (\tilde{f}^{1/m})_\epsilon \omega^n.
\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha_j = (\omega + dd^c\varphi_\epsilon),\ j = 1, ..., m-1$ il s'en suit que

$$(\omega + dd^c\varphi_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \geq ((\tilde{f}^{1/m})_\epsilon)^m \omega^n.$$

En faisant $\epsilon \downarrow 0$ on obtient

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} \geq \tilde{f} \omega^n,$$

au sens potentiel. Comme $\tilde{f} \leq \varphi$ a été choisie arbitrairement, on a

$$(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} \geq f \omega^n,$$

au sens potentiel.

Si $0 \leq f$ est continue, considérons $\varphi_t := (1-t)\varphi + t\psi$ où ψ est une fonction lisse strictement (ω, m)-sh et $0 < t < 1$. Alors pour chaque $t \in (0,1)$ fixé, φ_t vérifie

$$(\omega + dd^c\varphi_t)^m \wedge \omega^{n-m} \geq f_t \omega^n, \tag{3.4.5}$$

au sens de la viscosité, où f_t est continue, strictement positive, et donnée par la formule suivante :

$$f_t = (1-t)^m f + t^m \frac{(\omega + dd^c\psi)^m \wedge \omega^{n-m}}{\omega^n}.$$

On peut donc appliquer les arguments précédents pour montrer que φ_t vérifie (3.4.5) au sens potentiel. Il suffit maintenant de faire $t \downarrow 0$.

Cas 2 : F dépend de la deuxième variable. Comme φ est continue, la fonction $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = F(x, \varphi(x))$ est continue. On peut appliquer le cas 1. La preuve est donc complète.

□

3.4.2 Principe de comparaison global.

Dans ce paragraphe, on établit le principe de comparaison global pour (3.4.1). On suppose de plus que F est strictement croissante en t.

Soient u une sous-solution et v une sur-solution de (3.4.1). On construit une distance d sur K telle que $d^2 : K \times K \to \mathbb{R}^+$ est lisse. Considérons la sup-convolution et l'inf-convolution définies comme suit

$$u^\epsilon(x) := \sup \Big\{ u(g.x) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g,e) \ /\ \ g \in K \Big\}, \tag{3.4.6}$$

et

$$v_\epsilon(x) := \inf \Big\{ v(g.x) + \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g,e) \ /\ \ g \in K \Big\}. \tag{3.4.7}$$

Lemme 3.4.3. *Fixons $x_0 \in X$ et considérons des coordonnées locales $z : \Omega \to B(0,2)$, où Ω est un petit voisinage ouvert de x_0 et B est la boule euclidienne de rayon 2 dans $\mathbb{C}^n$. Alors u^ϵ, v_ϵ lues dans cette carte sont des fonctions semi-convexe et semi-concave respectivement. En particulier, elles sont deux fois ponctuellement différentiables presque partout dans $B(0,1)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour u^ϵ. Considérons une section lisse $s : \Omega \to K$ i.e telle que $\pi \circ s(x) = x, \forall x \in \Omega$, où π est la projection de K sur X.
Pour alléger la notation on identifie un point dans Ω avec son image dans $B(0,2)$. Considérons

$$\rho(x) = u^\epsilon(x) + C|x|^2,\ x \in B(0,2),$$

où $C > 0$ est une constante à préciser ultérieurement.

On affirme que pour chaque $x \in B(0,1)$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\rho(x+h) + \rho(x-h) \geq 2\rho(x),\ \forall h \in \mathbb{C}^{2n}, |h| \leq \delta.$$

Il est bien connu que cette propriété entraine la convexité de ρ.
Montrons l'affirmation. Soit $x_0 \in B(0,1)$ et $y_0 = g_0.x_0$ tel que

$$u^\epsilon(x_0) = u(y_0) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g_0, e). \tag{3.4.8}$$

En considérant $\epsilon > 0$ assez petit on peut supposer que $y_0 \in B(0, 3/2)$. Pour $h \in \mathbb{C}^n$ assez petit tel que $x_0 + h, x_0 - h \in B(0,1)$, posons

$$\theta(h) := g_0.s(x_0).s(x_0+h)^{-1}.$$

Alors, il est facile de voir que $\theta(h).(x_0+h) = y_0$. Par définition de u^ϵ on obtient

$$u^\epsilon(x_0+h) \geq u(y_0) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(\theta(h), e), \tag{3.4.9}$$

et

$$u^\epsilon(x_0-h) \geq u(y_0) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(\theta(-h), e). \tag{3.4.10}$$

D'après (3.4.8), (3.4.9) et (3.4.10) on obtient

$$u^\epsilon(x_0+h) + u^\epsilon(x_0-h) - 2u^\epsilon(x_0) \geq -\frac{1}{\epsilon^2}\Big(d^2(\theta(h), e) + d^2(\theta(-h), e) - 2d^2(\theta(0), e)\Big).$$

Puisque s est lisse et K est compact on peut choisir $C > 0$ suffisamment grande (qui ne dépend pas de x_0) telle que pour tout $h \in \mathbb{C}^n$ petit,

$$u^\epsilon(x_0+h) + u^\epsilon(x_0-h) - 2u^\epsilon(x_0) \geq -2C|h|^2,$$

L'affirmation est justifiée. La dernière affirmation dans le lemme 3.4.3 résulte du théorème de Alexandroff-Buselman-Feller (théorème 3.3.3). □

Lemme 3.4.4. *La fonction u^ϵ est une sous-solution de*

$$-(\omega + dd^c u)^m \wedge \omega^{n-m} + F_\epsilon(x, u)\omega^n = 0, \tag{3.4.11}$$

où

$$F_\epsilon(x,t) := \inf\Big\{F(g.x, t)\ \mid g \in K, d(g,e) \leq \sqrt{osc(u)}\epsilon\Big\}.$$

De façon similaire, v_ϵ est une sur-solution de

$$-(\omega + dd^c u)^m \wedge \omega^{n-m} + F^\epsilon(x, u)\omega^n = 0, \tag{3.4.12}$$

où

$$F^\epsilon(x,t) := \sup\Big\{F(g.x, t)\ \mid g \in K, d(g,e) \leq \sqrt{osc(v)}\epsilon\Big\}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la première conclusion car l'autre se fait de la même façon. Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $x_0 \in X$ qui touche u^ϵ par au-dessus en x_0. Soit $g_0 \in K$ tel que

$$u^\epsilon(x_0) = u(g_0.x_0) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g_0, e).$$

Considérons la fonction Q définie par

$$Q(x) := q(g_0^{-1}x) + \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g_0, e).$$

Alors Q touche u par au-dessus en $g_0.x_0$. La fonction u étant une sous-solution de (3.4.1), on a

$$(\omega + dd^c Q)^m \wedge \omega^{n-m} \geq F(x, Q)\omega^n, \text{ en } g_0.x_0.$$

Il est important de noter que $\mathcal{L}_{g_0}^* \omega = \omega$, on obtient alors

$$(\omega + dd^c q)^m \wedge \omega^{n-m} \geq F(g_0.x_0, q(x_0))\omega^n, \text{ en } x_0.$$

Par définition de u^ϵ on sait que $u^\epsilon(x_0) = u(g_0.x_0) - \frac{1}{\epsilon^2} d^2(g_0, e) \geq u(x_0)$. Donc, $d(g_0, e) \leq \epsilon\sqrt{\mathrm{osc}(u)}$, d'où le résultat. $\square$

Maintenant, on énonce et démontre un principe de comparaison global. Le fait que la forme ω soit invariante par l'action de K nous permet d'adapter la preuve du théorème 3.3.4 à ce cas.

Théorème 3.4.5. *Soit u une sous-solution bornée et v une sur-solution bornée de l'équation*

$$-(\omega + dd^c\varphi)^m \wedge \omega^{n-m} + F(x, \varphi)\omega^n = 0,$$

où $0 \leq F(x, t)$ est une fonction continue sur $X \times \mathbb{R}$ et strictement croissante en t. Alors $u \leq v$ sur X.

Démonstration. Considérons la sup-convolution et inf-convolution de u, v définies par (3.4.6) et (3.4.7) respectivement. Ces fonctions, lues dans une carte locale, sont des fonctions semi-convexes et semi-concaves respectivement. Elles sont donc deux fois ponctuellement différentiables presque partout sur X. Pour chaque $\epsilon > 0$, soit x_ϵ un point où $u^\epsilon - v_\epsilon$ atteint son maximum sur X.

On traite tout d'abord le cas où u^ϵ, v_ϵ sont deux fois ponctuellement différentiables au point x_ϵ. Dans ce cas, d'après le principe du maximum classique, on a

$$dd^c u^\epsilon \leq dd^c v_\epsilon \text{ en } x_\epsilon.$$

Comme la forme $(\omega + dd^c u^\epsilon)$ est (ω, m)-positive en x_ϵ, le lemme 3.4.4 nous donne

$$(\omega + dd^c u^\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \leq (\omega + dd^c v_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \text{ en } x_\epsilon.$$

Par conséquent,

$$F_\epsilon(x_\epsilon, u^\epsilon(x_\epsilon) \leq F^\epsilon(x_\epsilon, v_\epsilon(x_\epsilon)). \tag{3.4.13}$$

On peut supposer que $x_\epsilon \to x_0 \in X$. Quitte à passer à une sous suite (deux fois) on peut trouver une suite $\epsilon_j \downarrow 0$ telle que

$$F_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j})) \text{ et } F^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, v_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}))$$

convergent quand $j \to +\infty$. On en déduit, en appliquant (3.4.13), que

$$F(x_0, \liminf_j u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j})) \leq F(x_0, \limsup_j v_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j})).$$

Comme F est strictement croissante en t, on déduit que

$$\liminf u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) \leq \limsup v_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}). \tag{3.4.14}$$

Puisque $u^\epsilon \downarrow u$ et $v_\epsilon \uparrow v$, on a

$$\sup_X (u - v) \leq \sup_X (u^{\epsilon_j} - v_{\epsilon_j}) = u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) - v_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}).$$

Par conséquent, (3.4.14) implique que $\sup_X(u - v) \leq 0$.

Maintenant, si u^ϵ, v_ϵ ne sont pas deux fois ponctuellement différentiables en x_ϵ pour un $\epsilon > 0$ fixé, on procède comme dans [EGZ11] pour montrer que (3.4.13) est encore vraie. Considérons une carte locale centrée en x_ϵ. Pour alléger la notation, on identifie un point dans un voisinage de x_ϵ avec son image dans $\mathbb{C}^n$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction semi-convexe $u^\epsilon - v_\epsilon - \frac{1}{2k}\|x - x_\epsilon\|^2$ atteint son maximum strict en x_ϵ. D'après le lemme de Jensen ([Jen88] ; voir aussi [CIL92, Lemma A.3, page 60]), il existe (p_k) et (x_k)qui convergent vers 0 et x_ϵ respectivement telles que les fonctions u^ϵ, v_ϵ sont deux fois ponctuellement différentiables en x_k et la fonction

$$u^\epsilon - v_\epsilon - \frac{1}{2k}\|x - x_\epsilon\|^2 - \langle p_k, x\rangle$$

atteint son maximum local en x_k. On obtient alors

$$dd^c u^\epsilon \leq dd^c v_\epsilon + O(1/k)\omega \text{ en } x_k.$$

Comme v_ϵ est deux fois ponctuellement différentiables en x_k et u^ϵ est (ω, m)-sh, on obtient

$$(\omega + dd^c u^\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} \leq (\omega + dd^c v_\epsilon)^m \wedge \omega^{n-m} + O(1/k)\omega^n \text{ en } x_k.$$

Ceci avec (3.4.11) et (3.4.12) nous donnent

$$F_\epsilon(y_k, u^\epsilon(y_k)) \leq F^\epsilon(y_k, v_\epsilon(y_k)) + O(1/k).$$

En faisant $k \to +\infty$, on obtient (3.4.14), ce qui achève la preuve. □

3.5 Preuve des résultats principaux

3.5.1 Preuve du théorème 3.1.1

On note $\mathcal{F}$ la famille de sous-solutions de (3.1.1) qui ne sont pas plus grandes que v. On définit

$$\varphi := \sup\{w \ / \ w \in \mathcal{F}\}.$$

D'après le lemme de Choquet $\varphi^* = (\limsup w_j)^*$ où w_j est une suite dans $\mathcal{F}$. D'après le lemme 3.2.6, φ^* est une sous-solution de (3.1.1).

On affirme que φ_* est une sur-solution de (3.1.1). Supposons que φ_* n'est pas une sur-solution de (3.1.1). Alors il existe $x_0 \in \Omega$ et $q \in \mathcal{C}^2(\{x_0\})$ tels que q touche φ_* par en-dessous en x_0 mais

$$H_m(q)(x_0) > F(x_0, q(x_0))\beta^n.$$

D'après la continuité de F, on peut trouver $0 < \delta << \epsilon$, et $r > 0$ suffisamment petit (tel que $q \leq \varphi_*$ dans $B(x_0, r)$) de sorte que la fonction $Q = Q_{\epsilon,\delta} := q + \delta - \epsilon|x - x_0|^2$ vérifie

$$H_m(Q)(x) > F(x, Q(x))\beta^n, \ \forall x \in B = B(x_0, r).$$

Définissons $\phi = \varphi$ en dehors de B et $\phi = \max(\varphi, Q)$ dans B. Comme $Q < \varphi$ près de ∂B, on voit que ϕ est une sous-solution de (3.1.1) dans Ω. Choisissons (x_j) une suite dans B qui converge vers

x_0 telle que $\varphi(x_j) \to \varphi_*(x_0)$. Alors $Q(x_j) - \varphi(x_j) \to Q(x_0) - f_*(x_0) = \delta > 0$. Donc $\phi \not\equiv \varphi$, qui est une contradiction.

Conclusion : D'après ce qui précèdent on sait que φ_* est une sur-solution et φ^* est une sous-solution. Par l'hypothèse on a également $g = u_* \leq \varphi_* \leq \varphi^* \leq v^* = g$ sur $\partial\Omega$. Pour cette raison, le principe de comparaison nous donne $\varphi = \varphi_* = \varphi^*$, elle est donc une solution de viscosité de (3.1.1).

Reste à montrer que φ est une solution potentielle de (3.1.1). D'après le théorème 3.2.12 on sait que $H_m(\varphi) \geq F(x,\varphi)\beta^n$ au sens potentiel. Fixons $B = B(x_0, r) \subset \Omega$ une petite boule dans Ω. Grâce à [DK11, Theorem 2.10] on peut résoudre le problème de Dirichlet pour trouver $\psi \in \mathcal{P}_m(B) \cap \mathcal{C}(\bar{B})$ avec la valeur au bord φ telle que

$$H_m(\psi) = F(x,\varphi)\beta^n, \text{ dans } B.$$

D'après le principe de comparaison (potentiel), $\varphi \leq \psi$ dans $\bar{B}$. Introduisons $\tilde{\psi}$ qui est égale à ψ dans B et φ en dehors de B. Posons $G(x) = F(x, \varphi(x)), x \in \Omega$. Il est facile de voir que $\tilde{\psi}$ est une solution de viscosité de

$$-(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} + G\beta^n = 0.$$

D'après le principe de comparaison (de viscosité) on déduit que $\tilde{\psi} \leq \varphi$ dans Ω, qui implique que $\varphi = \psi$ dans B. D'où le résultat.

3.5.2 Preuve du théorème 3.1.2

Soit φ l'unique solution de viscosité de (3.1.1) obtenue par le théorème 3.1.1. Puisque $u, v \in \mathrm{Lip}_\gamma(\bar{\Omega})$ et F satisfait (3.1.4), on peut trouver $C > 0$ tel que

$$\sup_{x,y\in\bar{\Omega}} \Big(|u(x) - u(y)|^\alpha + |v(x) - v(y)|^\alpha\Big) \leq C|x-y|^\gamma,$$

et

$$\sup_{|t|\leq M} \sup_{x,y\in\bar{\Omega}} |F^{1/m}(x,t) - F^{1/m}(y,t)|^\alpha \leq C|x-y|^\gamma,$$

où $M > 0$ est tel que $|\varphi| \leq M$, sur $\bar{\Omega}$.

Fixons $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0,R)$. Définissons $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ par

$$\psi(x) := \sup_{y\in\bar{\Omega}} \Big\{\varphi(y) + C|x-y|^\gamma(|x|^2 - R^2 - 1)\Big\}.$$

Étape 1 : Montrons que ψ est γ-Höldérienne. Fixons $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$, et y_1, y_2 les points de $\bar{\Omega}$ où les maximums de $\psi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ sont atteints respectivement. Des calculs simples nous donnent

$$\begin{aligned}\psi(x_1) - \psi(x_2) &\geq C|x_1 - y_2|^\gamma(|x_1|^2 - R^2 - 1) - C|x_2 - y_2|^\gamma(|x_2|^2 - R^2 - 1)\\ &= C(|x_1|^2 - R^2 - 1)(|x_1 - y_2|^\gamma - |x_2 - y_2|^\gamma) + C|x_2 - y_2|^\gamma(|x_1|^2 - |x_2|^2)\\ &\geq C(|x_1|^2 - R^2 - 1)|x_1 - x_2|^\gamma + C|x_2 - y_2|^\gamma(|x_1|^2 - |x_2|^2) \geq -C'|x_1 - x_2|^\gamma,\end{aligned}$$

où $C' > 0$ ne dépend que de C, R. De façon similaire, on a

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) \leq C'|x_1 - x_2|^\gamma.$$

Les inégalités ci-dessus montrent que ψ est γ-Höldérienne dans $\bar{\Omega}$.

Étape 2 : Montrons que ψ est une sous-solution de (3.1.1). Soient $x_0 \in \Omega$ et $q \in \mathcal{C}^2(\{x_0\})$ qui touche ψ par au-dessus en x_0. Prenons $y_0 \in \bar{\Omega}$ tel que

$$\psi(x_0) = \varphi(y_0) + C|x_0 - y_0|^\gamma(|x_0|^2 - R^2 - 1).$$

Si $y_0 \in \partial\Omega$ alors $\varphi(y_0) = u(y_0)$, donc

$$\begin{aligned} 0 &\geq C|x_0 - y_0|^\gamma(|x_0|^2 - R^2) = \psi(x_0) - \varphi(y_0) + C|x_0 - y_0|^\gamma \\ &\geq u(x_0) - u(y_0) + C|x_0 - y_0|^\gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ et le résultat se déduit car φ est une sous-solution de (3.1.1). Il reste à traiter le cas où $y_0 \in \Omega$. La fonction Q, définie dans un petit voisinage de y_0 par

$$Q(x) := q(x + x_0 - y_0) - C|x_0 - y_0|^\gamma \Big(|x + x_0 - y_0|^2 - R^2 - 1\Big),$$

touche φ par au-dessus en y_0. Puisque φ est une sous-solution de (3.1.1), on a

$$\widetilde{S}_m^{1/m}\Big(dd^c Q(y_0)\Big) \geq F^{1/m}(y_0, Q(y_0)).$$

D'après la concavité de $\widetilde{S}_m^{1/m}$ on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_m^{1/m}\Big(dd^c q(x_0)\Big) &\geq F^{1/m}(y_0, Q(y_0)) + C|x_0 - y_0|^\gamma \\ &= F^{1/m}(y_0, \varphi(x_0)) + C|x_0 - y_0|^\gamma \\ &\geq F^{1/m}(x_0, \varphi(x_0)), \end{aligned}$$

ce qui implique que ψ est une sous-solution de (3.1.1). Il est clair que $\varphi \leq \psi$ et pour chaque $x \in \partial\Omega, y \in \bar{\Omega}$,

$$\varphi(y) - C|x - y|^\gamma \leq v(y) - C|x - y|^\gamma \leq v(x) = g(x).$$

Donc, $\psi = g$ sur $\partial\Omega$. Comme φ est maximale, on obtient $\varphi = \psi$, ce qui implique que φ est γ-Höldérienne.

3.5.3 Preuve du théorème 3.1.3

Supposons tout d'abord que Ω est strictement m-pseudoconvexe. Soit ρ une fonction strictement m-sousharmonique, lisse dans un voisinage de $\bar{\Omega}$ telle que $\rho = 0$ sur $\partial\Omega$. On résout le problème de Dirichlet pour trouver une fonction harmonique h dans Ω telle que $h = g$ sur $\bar{\Omega}$. Elle est donc une sur-solution continue de (3.1.1). D'après [DK11, Theorem 2.10], il existe $\psi \in \mathcal{SH}_m(\Omega)$ telle que $H_m(\psi) = 0$ dans Ω et $\psi = g$ au bord de $\bar{\Omega}$. Pour $A >> 1$ suffisamment grand, la fonction $A\rho + \psi$ est une sous-solution continue de (3.1.1). D'après le théorème 3.1.1, il existe une unique solution de viscosité de (3.1.1).

Maintenant, supposons que Ω est strictement pseudoconvexe et g est (2γ)-Höldérienne dans $\bar{\Omega}$. La fonction harmonique h est donc γ-Höldérienne. D'après [BT76], il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{Lip}_\gamma(\bar{\Omega})$ plurisousharmonique dans Ω qui est égale à g au bord. Il suffit d'utiliser le théorème 3.1.2.

Remarque 3.5.1. Si Ω est strictement m-pseudoconvexe et $g \in \mathrm{Lip}_{2\gamma}(\partial\Omega)$, on espère que la solution est γ-Höldérienne. Le problème est de construire une sous-solution γ-Höldérienne sur $\bar{\Omega}$ avec valeurs au bord g.

3.5.4 Preuve du théorème 3.1.5

D'après (3.1.5), $u \equiv t_0$ est une sous-solution et $v \equiv t_1$ est une sur-solution de (3.4.1). Le principe de comparaison global (théorème 3.4.5) nous permet de répéter la preuve du théorème 3.1.1 pour démontrer le théorème 3.1.5.

Proposition 3.5.2. *Si ω est kählérienne, la solution de viscosité obtenue par le théorème 3.1.5 est aussi une solution potentielle.*

Démonstration. Par continuité, on peut trouver $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_X F(x,t_2)\omega^n = \int_X \omega^n$. D'après le théorème 2.1.1, (3.4.1) admet une solution potentielle, i.e. il existe $\psi \in \mathcal{P}_m(X,\omega) \cap \mathcal{C}(X)$ telle que

$$H_m(\psi) = F(x,\psi)\omega^n,$$

au sens du potentiel. Montrons que ψ est aussi une solution de viscosité. D'après le théorème 3.4.2, ψ est une sous-solution de viscosité de (3.4.1). Supposons que ψ n'est pas une sur-solution de viscosité de (3.4.1). Alors il existe $x_0 \in X$, $q \in \mathcal{C}^2(V)$ (où V est un petit voisinage de x_0) qui touche ψ par au-dessous en x_0 tels que

$$H_m(q)(x_0) > F(x_0, \psi(x_0))\omega^n(x_0).$$

Par continuité, il existe $r > 0$ tel que

$$H_m(q_\epsilon) > F(x,\psi)\omega^n,$$

dans $B(x_0,r)$, où $q_\epsilon = q - \epsilon|x-x_0|^2 + \epsilon.r^2$. On a $q_\epsilon \leq \psi$ au bord de $B(x_0,r)$ mais $q_\epsilon(x_0) > \psi(x_0)$ et

$$H_m(q_\epsilon) \geq H_m(\psi),$$

dans $B(x_0,r)$. Cela est en contradiction avec le principe de comparaison potentiel comme dans la preuve du théorème 3.4.2. □

Remarque 3.5.3. Si ω n'est pas fermée, le problème est délicate.

On termine ce chapitre en donnant un exemple de variété hermitienne compacte homogène vérifiant (H1), (H2), (H3) qui n'est pas kählérienne. Cet exemple nous a été communiqué par Karl Oeljeklaus que nous remercions.

Exemple 3.5.4. Considérons $G = SL(3,\mathbb{C})$, $K = SU(3,\mathbb{C})$ et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^w & z_1 & z_2 \\ 0 & e^{iw} & z_3 \\ 0 & 0 & e^{-w-iw} \end{pmatrix} \Big/ \; w, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Alors G est un groupe de Lie complexe et H est un sous groupe complexe fermé. L'espace $X = G/H$ est muni d'une structure complexe. Elle est une variété hermitienne compacte.

Il est clair que K agit transitivement et librement sur X. En prenant une métrique hermitienne et en faisant la moyenne par la mesure de Haar de K, on obtient une autre métrique hermitienne ω qui est invariante par K.

Montrons que X n'est pas kählérienne. Soit $N = N_G(H)$ le normalisateur de H (qui est connexe). Il est facile de voir que N est le groupe des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1.

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & z_1 & z_2 \\ 0 & \lambda_2 & z_3 \\ 0 & 0 & (\lambda_1.\lambda_2)^{-1} \end{pmatrix} \Big/ \; z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C};\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Supposons que X est kählérienne. D'après [BR62] (voir aussi [BN90]) le fibre $F = N/H$ du fibré de Tits

$$\pi : G/H \to G/N$$

est un tore complexe compact et ce fibré est holomorphiquement trivial. On en déduit que $\pi_1(X)$ est non trivial, ce qui est en contradiction avec le fait que X est simplement connexe.

Bibliographie

[Ad75] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press , New York-London, 1975. xviii+268 pp.

[Au82] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 252. Springer-Verlag, New York, 1982. xii+204 pp.

[AV10] S. Alekser, M. Verbitsky, Quaternionic Monge-Ampère equations and Calabi problem for HKT-manifolds, *Israel J. Math.* 176 (2010), 109-138.

[ACC10] P. Ahag, U. Cegrell, R. Czyz, *On Dirichlet's principle and problem*, preprint arXiv :0912.1244v2.

[BT76] E. Bedford, B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. 37 (1976), no. 1, 1-44.

[BT82] E. Bedford, B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), no. 1-2, 1-40.

[Bl03] Z. Blocki, *Uniqueness and stability for the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifold*, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), no. 6, 1697-1701.

[Bl05] Z. Blocki, *Weak solutions to the complex Hessian equation*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no. 5, 1735-1756.

[Bl12] Z. Blocki, *The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds*, Lect. Notes in Mathematics, Spinger Verlag 238 (2012).

[BK07] Z. Blocki, S. Kolodziej, *On regularization of plurisubharmonic functions on manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 7, 2089-2093.

[BN90] W. Barth, R. Narasimhan (ediror), *Several complex variables. VI. Complex manifolds*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 69. Springer-Verlag, Berlin, 1990. viii+310.

[BR62] A. Borel, R. Remmert, *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, (German) Math. Ann. 145 1961/1962 429-439.

[BGZ08] S. Benelkourchi, V. Guedj, A. Zeriahi, *A priori estimates for weak solutions of complex Monge-Ampère equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 7 (2008), no. 1, 81-96.

[BBGZ09] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi, *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Publ. Math. IHES (à paraitre).

[Ceg98] U. Cegrell, *Pluricomplex energy*, Acta Math. 180 (1998), no. 2, 187-217.

[Ceg04] U. Cegrell, *The general definition of the complex Monge-Ampére operator*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004), no. 1, 159-179.

[Ch00] X. X .Chen, *The space of Kähler metrics*, J. Differential Geom. 56 (2000), no. 2, 189-234.

[Chi1] L. H. Chinh, *Solutions to degenerate complex Hessian equations*, arXiv :1202.2436v3.

[Chi2] L. H. Chinh, *Viscosity solutions to complex Hessian equations*, arXiv :1209.5343.

[CC95] L. A. Caffarelli, X. Cabré, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol 43, (1995).

[CL83] M. G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), no. 1, 1-42.

[CW01] K.-S. Chou and X.-J. Wang, *Variational theory for Hessian equations*, Comm. Pure Appl. Math., 54 (2001), 1029-1064.

[CWu98] Y. Z. Chen, L. C. Wu, *Second order elliptic equations and elliptic systems*, Translated from the 1991 Chinese original by Bei Hu. Translations of Mathematical Monographs, 174. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. xiv+246 pp.

[CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1-67.

[CNS85] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck, *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III : Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. 155 (1985), 261-301.

[De92] J.-P. Demailly, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Alg. Geom. 1 (1992), 361-409.

[Di09] S. Dinew, *An inequality for mixed Monge-Ampère measures*, Math. Zeit. 262 (2009), 1-15.

[DK09] S. Dinew, S. Kolodziej, *Pluripotential estimates on compact Hermitian manifolds*, arXiv :0910.3937.

[DK11] S. Dinew, S. Kolodziej, *A priori estimates for complex Hessian equations*, arXiv :1112.3063v1.

[DK12] S. Dinew, S. Kolodziej, *Liouville and Calabi-Yau type theorems for complex Hessian equations*, arXiv :1203.3995v1.

[EG92] C. L. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp.

[EGZ09] P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, *Singular Kähler Einstein metrics*, Journal of the American Mathematical Society, Volume 22, Number 3, (2009), 607-639.

[EGZ11] P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, *Viscosity solutions to degenerate complex Monge-Ampère equations*, Comm. Pure Appl. Math. 64 (2011), no. 8, 1059-1094.

[Ga59] L. Gårding, *An inequality for Hyperbolic Polynomials*, J. Math. Mech. 8 (1959) 957-965.

[G99] V. Guedj, *Approximation of currents on complex manifolds*, Math. Ann. 313 (1999), no. 3, 437-474.

[GL96] B. Guan, Y.-Y. Li *Monge-Ampère equations on Riemannian manifolds*, J. Differential Equations 132 (1996), no. 1, 126-139.

[GW79] R. E. Greene, H. Wu, $\mathcal{C}^\infty$ *approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 12 (1979), no. 1, 47-84.

[GZ05] V. Guedj, A. Zeriahi, *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. 15 (2005), no. 4, 607-639.

[GZ07] V. Guedj, A. Zeriahi, *The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions*, J. Funct. Anal. 250 (2007), no. 2, 442-482.

[GKZ08] V. Guedj, S. Kolodziej, A. Zeriahi, *Hölder continuous solutions to Monge-Ampère equations*, Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 6, 1070-1080.

[HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O.Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. vi+363 pp.

[Hör94] L. Hörmander, *Notions of convexity*, Progress in Math., Birkhäuser (1994).

[H09] Z. Hou, *Complex Hessian equation on Kähler manifold*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 16, 3098-3111.

[Hu94] A. Huckleberry, *Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds*, Contributions to complex analysis and analytic geometry, 189-232, Aspects Math., E26, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1994.

[HMW10] Z. Hou, X. Ma, D.-M. Wu, *A second order estimate for complex Hessian equations on a compact Kähler manifold*, Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 3, 547-561.

[ITW04] N. Ivochkina, N. S. Trudinger, X.-J. Wang, *The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations*, Comm. Partial Diff. Equations 29 (2004), 219-235.

[Jb10] A. Jbilou, *Equations hessiennes complexes sur des variétés kählériennes compactes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 1-2, 41-46.

[Jb10T] A. Jbilou, *Equations hessiennes complexes sur les variétés kählériennes compactes*, Thèse, Univ. Nice Sophia-Antipolis (19 Février 2010).

[Jen88] R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), no. 1, 1-27.

[Kl91] M. Klimek, *Pluripotential theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 6. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

[Kok10] V. N. Kokarev, *Mixed volume forms and a complex equation of Monge-Ampère type on Kähler manifolds of positive curvature*, Izv. RAN. Ser. Mat. 74 :3 (2010), 65-78.

[Kol98] S. Kolodziej, *The complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. 180 (1998) 69-117.

[Kol02] S. Kolodziej, *Equicontinuity of families of plurisubharmonic functions with bounds on their Mone-Ampère masses*, Math. Z. 240 (2002), no. 4, 835-847.

[Kol03] S. Kolodziej, *The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds* Indiana Univ. Math. J. 52 (2003) 667-686.

[Kol05] S. Kolodziej, *The complex Monge-Ampère equation and theory*, Memoirs Amer. Math. Soc. 178 (2005) 64p.

[Kr87] N. V. Krylov, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Translated from the Russian by P. L. Buzytsky, Mathematics and its Applications (Soviet Series), 7. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. xiv+462 pp.

[Kr95] N. V. Krylov, *On the general notion of fully nonlinear second-order elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 857-895.

[La02] D. Labutin, *Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. 111 (2002), 1-49.

[Li04] S.-Y. Li, *On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian*, Asian J. Math. 8 (2004),no. 1, 87-106.

[Lio83] P. L. Lions, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. II. Viscosity solutions and uniqueness*, Comm. Partial Differential Equations 8 (1983), no. 11, 1229-1276.

[Lit63] W. Littman, *Generalized subharmonic functions : Monotonic approximations and an improved maximum principle*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17 (1963) 207-222.

[Per99] L. Persson, *A Dirichlet principle for the complex Monge-Ampère operator*, Ark. Mat. 37 (1999), no. 2, 345-356.

[Rai69] J. Rainwater, *A note on the preceding paper*, Duke Math. J. 36 1969 799-800.

[SA12] A. S. Sadullaev, B. I. Abdullaev, *Capacities and Hessians in a class of m-subharmonic functions*, preprint arXiv :1201.6531.

[Tr95] N. S. Trudinger, *On the Dirichlet problem for Hessian equations*, Acta Math. 175 (1995), 151-164.

[TW99] N. S. Trudinger, X.-J. Wang, *Hessian measures II*, Ann. of Math. 150 (1999), 579-604.

[TWe10] V. Tosatti, B. Weinkove, *The complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 1187-1195.

[Ur01] J. Urbas, *An interior second derivative bound for solutions of Hessian equations*, Calc. Var. PDE (12) (2001), 417-431.

[Y78] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation* Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), no. 3, 339-411.

[W09] X.-J. Wang, *The k-Hessian equation*, Lecture Notes in Math., 1977, Springer, Dordrecht, 2009.

[YW10] Y. Wang, *A Viscosity Approach to the Dirichlet Problem for Complex Monge-Ampère Equations*, arXiv :1010.1292v2.